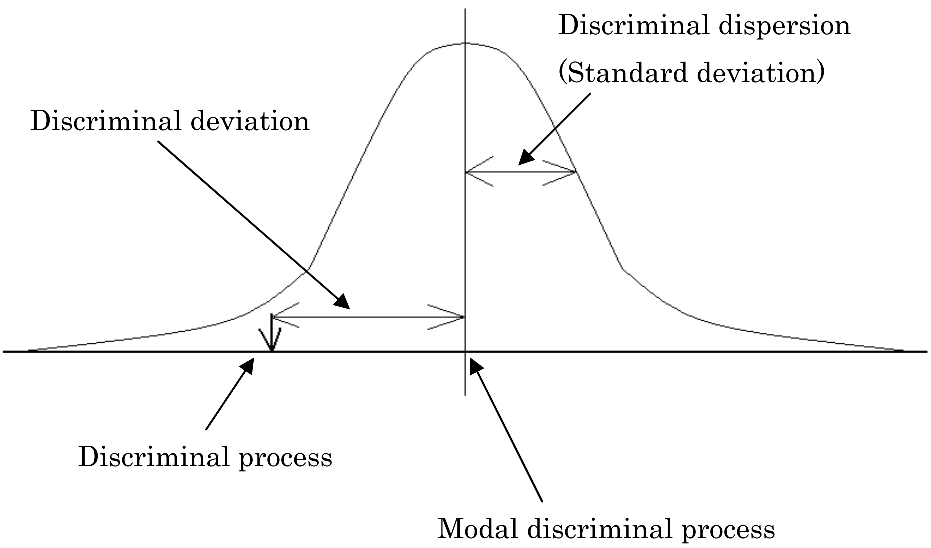
補足 1－5 比較判断の法則（Law of Comparative judgment）

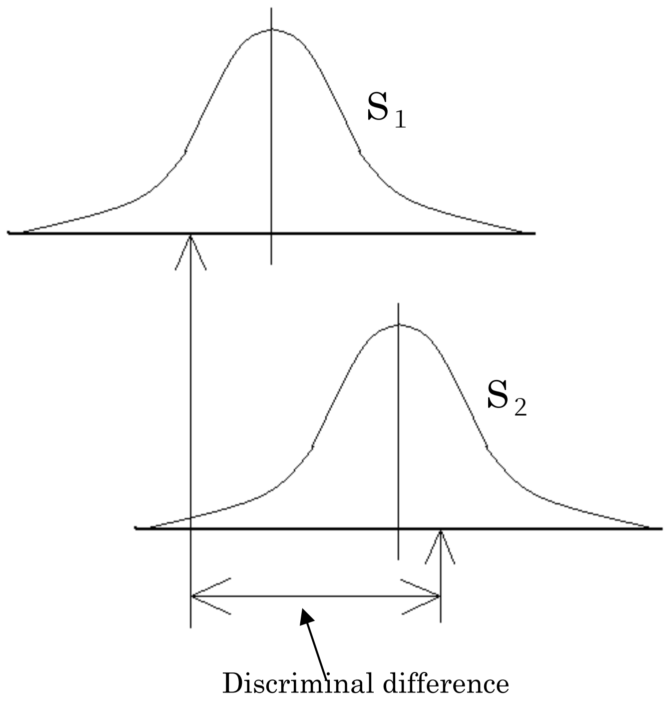
比較判断の法則とは、サーストン（Thurstone, 1927）によって提案された主観的印象あるいは感覚量の比較についてのモデルである。主観的印象の強さあるいは感覚量は、心理学的連続体（psychological continuum）と呼ばれる実数軸上の数値として表されると考え、物理刺激に対して喚起された心理連続体上の値（数値）を discriminal process と呼ぶ（図附 1.5.1）。同じ物理刺激であって



図附 1.5.1　モデル（比較判断の法則）に基本構造

も、その感覚量あるいは主観的印象は提示ごとに変動している。このランダムな変動を表すために、感覚量すなわち discriminal process は刺激の提示ごとにランダムに変動する値であるとし、その分布は正規分布に従うとする。ある物理刺激に対する discriminal process の分布の平均を modal discriminal process、標準偏差を discriminal dispersion と呼ぶ。刺激が提示されたときの discriminal process とその modal discriminal process との差を discriminal deviation とい

う。一対比較において、対提示されるそれぞれの刺激の discriminal process の差は discriminal difference と呼ばれる（図附 1.5.2）。



図附 1.5.2　２つの刺激の比較

いま、２つの刺激、S_1 と S_2、を考える。S_1 によって惹き起こされる感覚量（discriminal process）を X_1、S_2 によって惹き起こされる感覚量を X_2 で表す。X_1 および X_2 は、それぞれ平均 μ_1 および μ_2、分散 σ_1^2 および σ_2^2 の正規分布に従うものとする。

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)、\quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

このとき、S_1 の主観的感覚が S_2 より強いと感じる（$S_1 \succ S_2$ で表す）のは、S_1 の感覚量が S_2 の感覚量より大きい値のときであると考える。したがって、

$$P(S_1 \succ S_2) = P(X_1 > X_2) = P(X_1 - X_2 > 0) \qquad \text{(附 1.5.1)}$$

$X_1 - X_2$ は、次式で表される分布に従う。

$$X_1 - X_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) \qquad \text{(附 1.5.2)}$$

ここで、r_{12}はX_1とX_2の相関係数を表す。

式(附 1.5.1)および(附 1.5.2)より、次式が成り立つ。

$$P(S_1 \succ S_2) = \int_0^{\infty} \phi\left(x; \mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2\right) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{\mu_1-\mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}} \phi(x;0,1)dx \qquad \text{(附 1.5.3)}$$

ここで、$\phi\left(x;\mu,\sigma^2\right)$は、平均$\mu$、分散$\sigma^2$の正規分布の確率密度関数を表す。

いま、

$$P(S_1 \succ S_2) = \int_{-\infty}^{x_{12}} \phi(x;0,1)dx \qquad \text{(附 1.5.4)}$$

とおく。式(附 1.5.3)と(附 1.5.4）より次式が成り立つ。

$$x_{12} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 = x_{12} \cdot \sqrt{\sigma_1^2 - 2r_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \qquad \text{(附 1.5.5)}$$

式(附 1.5.5)は、データ値x_{12}（式（附 1.5.4）によって、S_1の方がS_2より感覚量が強いと判断された比率から算出される）とモデルのパラメタμ_i、σ_i^2、r_{12}の値との関係を与えるものであり、この式に基づいてデータx_{12}に対するパラメタμ_i、σ_i^2、r_{12}の値を求めることになる。このとき、比較判断に用いる刺激の数をKで表すと、独立なデータの数N_{data}は

$$N_{data} = \frac{K(K-1)}{2}$$

であり、パラメタの数N_{param}は

$$N_{param} = \left(\mu_i \text{の数}\right) + \left(\sigma_i^2 \text{の数}\right) + \left(\text{独立な} r_{ij} \text{の数}\right)$$

$$= K + K + \frac{K(K-1)}{2}$$
$$= 2K + \frac{K(K-1)}{2}$$
$$> N_{data}$$

である。パラメタの値が一意に決まるためには

$$N_{data} \geq N_{param} \tag{附 1.5.6}$$

でなければならない。上式が成り立つように、モデルに制約条件が導入される。制約条件の種類により、ケースⅠからケースⅤまでの区別がある。

ケースⅠ

$r_{ij} = r =$ 一定 とする。このモデルでは、データが１人の被験者から集められる場合を考える。同じ対の多数回の比較判断に基づいて(附 1.5.4)によってデータ x_{ij} を算出する。ケースⅠの場合のパラメタの数は、次式で与えられる。

$$N_{param} = (\mu_i \text{の数}) + (\sigma_i^2 \text{の数}) + (\text{独立な} r_{ij} \text{の数})$$
$$= (K-1) + (K-1) + 1$$
$$= 2K - 1$$

μ_i の数、および σ_i^2 の数が $K-1$ になっているのは、それぞれ原点の任意性、単位の任意性により、例えば、$\mu_1 = 0$ および $\sigma_1^2 = 1$ とパラメタ値をそれぞれ１つ任意に設定することができるからである。

式(附Ⅰ.5.6)が満たされるためには、次式が成り立たなければならない。

$$2K - 1 = N_{param} < N_{data} = \frac{K(K-1)}{2}$$

不等号が、≤ではなく、<と等号の含まないものにしているのは、データ数とパラメタ数が等しい場合は、データのランダムな変動がパラメタの推定値にそ

のまま影響しやすいからである。上式を変形すると以下のようになる。

$$K^2 - 5K + 2 > 0$$

$$(K-4)(N-1) > 2$$

$$K > 4$$

すなわち、刺激数Kが４より多いとき、パラメタの値を一意に推定することができる。

ケースⅡ

パラメタの制約条件はケースⅠの場合と同じであるが、データが等質な複数の被験者から収集される場合を考えるものである。複数の被験者からのデータを、同一の被験者からのデータと同じように扱って分析する。

ケースⅢ

相関係数が０であると考える。

$$r = 0$$

したがって、

$$\begin{aligned} N_{param} &= (\mu_i\text{の数}) + (\sigma_i^2\text{の数}) + (\text{独立な}r_{ij}\text{の数}) \\ &= (K-1) + (K-1) \\ &= 2K - 2 \end{aligned}$$

式(附１.5.6)の条件（等号は省く）より次式が導かれる。

$$2K - 2 = N_{param} < N_{data} = \frac{K(K-1)}{2}$$

$$K^2 - 5K + 4 > 0$$

$$(K-1)(K-4) > 0$$

$$K > 4$$

したがって、刺激数Kが４より多いとき、パラメタの値を一意に求めること

ができる。

ケースⅣ

ケースⅢの場合において、さらに分散がお互いにほぼ同じである

$$\sigma_i^2 \approx \sigma_j^2$$

と仮定するものである。いま、次のようにおく。

$$\sigma_j = \sigma_i + d \text{、} \quad \frac{d}{\sigma_i} << 1$$

このとき、式(附 1.5.5)より次式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\mu_i - \mu_j &= x_{ij} \cdot \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2} \\
&= x_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 + (\sigma_i + d)^2} \\
&= x_{ij} \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_i^2 + 2\sigma_i d + d^2} \\
&= x_{ij} \sqrt{2}\sigma_i \sqrt{1 + \left(\frac{d}{\sigma_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{\sigma_i}\right)^2} \\
&\approx x_{ij} \sqrt{2}\sigma_i \left(1 + \frac{d}{2\sigma_i}\right) \\
&= x_{ij} \left(\sqrt{2}\sigma_i + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_j - \sigma_i)\right) \\
&= x_{ij} \cdot \frac{\sigma_i}{\sqrt{2}} + x_{ij} \cdot \frac{\sigma_j}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \qquad \text{（附 1.5.7）}$$

式(附 1.5.7)は、パラメタ μ_i および σ_i についての連立 1 次方程式である。

ケースⅤ

ケースⅢにおいて、分散はすべて同じであると仮定する。

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 = \text{一定}$$

このケースが、本書で説明した一対比較法データの分析法である。分散 σ^2 は、

単位を決めるもので任意に設定することができる。本書での分析では

$$\sigma^2 = 1$$

とした。

したがって、パラメタの数は次式で与えられる。

$$N_{param} = (\mu_i\text{の数}) + (\sigma_i^2\text{の数}) + (\text{独立な}r_{ij}\text{の数})$$

$$= (K - 1)$$

このケースでの式(附 1.5.6)の条件（等号は省く）は、以下のようになる。

$$K - 1 = N_{param} < N_{data} = \frac{K(K-1)}{2}$$

$$K^2 - 3K + 2 > 0$$

$$(K-1)(K-2) > 0$$

$$K > 2$$

刺激の数Kが２個より多ければ、パラメタの値を一意に決めることができる。