補足１－７　一対比較法の場合の最尤法とモデル適合度

次式の対数尤度関数

$$l = \sum_{i<j} \left\{ n_{ij} \log p_{ij} + n_{ji} \log(1 - p_{ji}) \right\} \tag{1.19}$$

の最大化を共役勾配法で行う。勾配を与える偏導関数は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_i} = \sum_{i<j} \left\{ n_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} \cdot \frac{\partial p_{ij}}{\partial \mu_i} + n_{ji} \cdot \frac{-1}{1 - p_{ij}} \cdot \frac{\partial p_{ij}}{\partial \mu_i} \right\}$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial \mu_i} = \frac{\partial}{\partial \mu_i} \Phi\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{2}} \right) = \phi_0\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

適合度の検定を行うときは、多項分布を当てはめたモデルと比較する。これは、式(1.19)において、p_{ij}を比較判断の法則（式(1.18)）

$$p_{ij} = P(S_i \succ S_j) = \Phi\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}} \right) \tag{1.18}$$

で与えるのではなく、p_{ij}に確率であるという制約以外は置かずに式(1.19)の最大化を行うもので、この「p_{ij}は確率である」という制約のみのモデルを飽和モデルと呼ぶ。この飽和モデルにおけるp_{ij}の最尤推定量を求めるため、式(1.19)をp_{ij}で偏微分する。

$$\frac{\partial l}{\partial p_{ij}} = n_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} + n_{ji} \cdot \frac{-1}{1 - p_{ij}}$$

上式の値を０とおいて、次式を得る。

$$n_{ij} \cdot \frac{1}{p_{ij}} = n_{ji} \cdot \frac{1}{1 - p_{ij}}$$

$$n_{ij}(1 - p_{ij}) = n_{ji} p_{ij}$$

$$p_{ij}\left(n_{ij}+n_{ji}\right)=n_{ij}$$

$$p_{ij}=\frac{n_{ij}}{n_{ij}+n_{ji}} \qquad \text{（附 1.7.1）}$$

式(附 1.7.1)で与えられる値が、飽和モデルでの最尤推定量である。比較判断の法則がデータに適合しているかどうかを、飽和モデルの最大対数尤度と比較して検定する。飽和モデルの下での最大対数尤度をl_0、比較判断の法則のもとでの最大対数尤度をl_1とおく。パラメタの数は、飽和モデルでは

$$K(K-1)/2$$

比較判断の法則では

$$K-1$$

である。ただし、Kは刺激数を表す。

このとき、対数尤度比統計量は次式

$$-\log\lambda=2\left(l_0-l_1\right)$$

で与えられ、自由度

$$K(K-1)/2-(K-1)$$

のカイ 2 乗分布に対して検定を行う。

情報量基準は次式で与えられる。

飽和モデル：

$$AIC=-2\cdot l_0+2\times K(K-1)/2$$

比較判断の法則：

$$AIC=-2\cdot l_1+2\times(K-1)$$