補足 1－8 カテゴリ判断の法則

トーガソン（Torgerson, 1958）は、カテゴリ判断の法則と呼ばれているモデルを、被験者についての条件と、感覚量およびカテゴリ境界についての条件の２つの条件の組み合わせで考えている。

まず、被験者の条件の方は、次のクラスⅠからクラスⅢまでを区別している。

クラスⅠ：　一人の被験者からの繰り返しによるデータである場合。

クラスⅡ：　複数の等質な被験者からのデータで、各被験者からデータは１つずつ採られる場合。１人１人のデータを同じ被験者からの繰り返しデータとみなし、分析はクラスⅠの場合と同様に行う。

クラスⅢ：　クラスⅠとクラスⅡの混合である。複数の同質な被験者から複数のデータが採られる。クラスⅡの場合と同様に、異なる被験者からのデータは同じ被験者からのデータであるかのように扱う。

感覚量とカテゴリ境界については、４つのモデルの特殊化（簡単化）の条件が区別されているが、カテゴリ境界 c_g も確率変数と考えられているので、まず以下の記号を導入する。

t_g：　カテゴリ境界 c_g の平均値

σ_g^2：　カテゴリ境界 c_g の分散

r_{ig}：　刺激 S_i の感覚量 X_i とカテゴリ境界 c_g の相関係数

x_{ig}：　刺激 S_i のカテゴリ判断がカテゴリ g 以下である確率に対応する標

準正規分布上の値

カテゴリ境界c_gも正規分布に従うと仮定されている。

$$c_g \sim N\left(t_g, \sigma_g^2\right)$$

また、

$$P\left(R \le g \middle| S_i\right) = \int_{-\infty}^{x_{ig}} \phi_0(z)dz = \Phi\left(x_{ig}\right) \qquad \text{（附 1.8.1）}$$

$$c_g - X_i \sim N\left(t_g - \mu_i, \sigma_g^2 + \sigma_i^2 - 2r_{ig}\sigma_g\sigma_i\right)$$

である。

よって、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} P\left(R \le g \middle| S_i\right) &= P\left(X_i < c_g\right) \\ &= P\left(c_g - X_i > 0\right) \\ &= \int_0^{\infty} \phi\left(x; t_g - \mu_i, \sigma_g^2 + \sigma_i^2 - 2r_{ig}\sigma_g\sigma_i\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_i^2 - 2r_{ig}\sigma_g\sigma_i}}} \phi_0(z)dz \end{aligned} \qquad \text{（附 1.8.2）}$$

式（附 1.8.1）と（附 1.8.2）より次式が成り立つ。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_i^2 - 2r_{ig}\sigma_i\sigma_g}} \qquad \text{（附 1.8.3）}$$

上式（附 1.8.3）の左辺がデータを表している。式（附 1.8.3）によりパラメタの値を求める場合、データの数N_{data}とパラメタの数N_{param}の関係は以下のようになっている。

まず、データ数の方は、採ったデータにかかわらず

$$x_{im} = +\infty$$

となっていて、独立なデータの数は

$$N_{data} = (m-1)N$$

である。

　パラメタの方は、t_g が $(m-1)$ 個、μ_i が N 個、σ_g^2 が $(m-1)$ 個、σ_i^2 が N 個、r_{ig} が $(m-1)N$ 個あるので、パラメタの数 N_{param} は次式で与えられる。

$$N_{param} = (m-1) + N + (m-1) + N + (m-1)N$$

　したがって、

$$N_{data} < N_{param}$$

となり、パラメタ数の方がデータ数より多いので、パラメタの値を一意に決めることは一般にはできない。モデルに設定する制約条件として、トーガソンは以下の４つを論じている。

条件 A:　式（附 1.8.3）において、

$$r_{ig}\sigma_i\sigma_g = \gamma = \text{一定}$$

とする。このとき、式（附 1.8.3）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_i^2 - 2\gamma}}$$

条件 B：　式（附 1.8.3）において、

$$\sigma_g^2 = \gamma = \text{一定、} \quad r_{ig} = 0$$

とする。このとき、式（附 1.8.3）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\gamma + \sigma_i^2}} \qquad \text{（附 1.8.3）}$$

いま、

$$a_i^2 = \gamma + \sigma_i^2$$

とおくと、式（附 1.8.3）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{a_i}$$

条件 C：　式（附 1.8.3）において、

$$\sigma_i^2 = \gamma = 一定、\quad r_{ig} = 0$$

とする。このとき、式（附 1.8.3）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\gamma + \sigma_g^2}} \qquad \text{（附 1.8.4）}$$

いま、

$$b_g^2 = \gamma + \sigma_g^2$$

とおくと、式（附 1.8.4）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{b_g}$$

条件 D：　式（附 1.8.3）において、

$$\sigma_i^2 = \gamma_1 = 一定、\sigma_i^2 = \gamma_2 = 一定、\quad r_{ig} = \gamma_3 = 一定$$

とする。このとき、式（附 1.8.3）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\sqrt{\gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 \gamma_1^{1/2} \gamma_2^{1/2}}} \qquad \text{（附 1.8.5）}$$

いま、

$$\delta^2 = \gamma_1 + \gamma_2 - 2\gamma_3 \gamma_1^{1/2} \gamma_2^{1/2}$$

とおくと、式（附 1.8.4）は次式となる。

$$x_{ig} = \frac{t_g - \mu_i}{\delta}$$

条件 D において、

$$\delta = 1$$

であるように心理学的連続体の単位をとって分析を行う方法が、本章において用いられた分析法である。