

### 附録 2-4 2件法の場合のベイズ的方法

精神測定関数の2つのパラメタ $\mu$ と $\sigma$ の事前分布としては、一様分布を採用する。

$$P(\mu, \sigma) = \frac{1}{(N_\mu + 1)(N_\sigma + 1)}$$

ここで、 $\mu$ および $\sigma$ は、それぞれ $\mu_{\min}$ から $\mu_{\max}$ 、および $\sigma_{\min}$ から $\sigma_{\max}$ までの範囲の $N_\mu + 1$ 個および $N_\sigma + 1$ 個の値をとるものとする。すなわち、

$$\mu = \mu_{\min} + i \times (\mu_{\max} - \mu_{\min}) / N_\mu, \quad i = 0, 1, \dots, N_\mu$$

$$\sigma = \sigma_{\min} + i \times (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / N_\sigma, \quad i = 0, 1, \dots, N_\sigma$$

である。サンプルプログラムでは、 $N_\mu = N_\sigma = 100$ となっている。

パラメタ $\mu$ および $\sigma$ に対するデータ $\{G_1, L_1, \dots, G_M, L_M\}$ （簡単に、 $\{G_i, L_i\}$ で表す）の確率は、次式で与えられる。

$$P(G_i, L_i | \mu, \sigma) = (\text{定数}) \times \prod_{i=1}^M P(\mu, \sigma)^{G_i} \{1 - P(\mu, \sigma)\}^{L_i}$$

事後確率は次のようになる。

$$\begin{aligned} P(\mu, \sigma | G_i, L_i) &= \frac{P(\mu, \sigma, G_i, L_i)}{P(G_i, L_i)} \\ &= \frac{P(G_i, L_i | \mu, \sigma) \cdot P(\mu, \sigma)}{\sum_{\mu, \sigma} P(\mu, \sigma, G_i, L_i)} \\ &= \frac{P(G_i, L_i | \mu, \sigma) \cdot P(\mu, \sigma)}{\sum_{\mu, \sigma} P(G_i, L_i | \mu, \sigma) \cdot P(\mu, \sigma)} \end{aligned}$$

パラメタの推定値を事後分布の平均値で与えると次のようになる。

$$\hat{\mu} = \sum_{\mu, \sigma} \mu \cdot P(\mu, \sigma | G_i, L_i), \quad \hat{\sigma} = \sum_{\mu, \sigma} \sigma \cdot P(\mu, \sigma | G_i, L_i)$$

パラメタの  $\alpha \times 100\%$  確信区間は、以下のように加重平均として求める。

例えば、パラメタ  $\mu$  の確信区間  $[\mu_{\alpha/2}, \mu_{1-(\alpha/2)}]$  における端点  $\mu_p$ ;  $p = \alpha/2, 1 - \alpha/2$

の値について説明すると、まず  $\mu$  の事後分布

$$P(\mu | G_i, L_i) = \sum_{\sigma} P(\mu, \sigma | G_i, L_i)$$

を求める。

$$\mu_k = \mu_{\min} + k \cdot (\mu_{\max} - \mu_{\min}) / N_{\mu}$$

とおき、 $p$  に対して次式を満たす  $h_p$  を求める。

$$\sum_{k=0}^{h_p-1} P(\mu_k | G_i, L_i) \leq p \leq \sum_{k=0}^{h_p} P(\mu_k | G_i, L_i)$$

上式に対して次の重み

$$w_1 = p - \sum_{k=0}^{h_p-1} P(\mu_k | G_i, L_i)$$

$$w_2 = \sum_{k=0}^{h_p} P(\mu_k | G_i, L_i) - p$$

に応じて累積確率  $p$  に対応する  $\mu$  の値  $\mu_p$  を求める。

$$\mu_p = \frac{w_2 \mu_{h_p-1} + w_1 \mu_{h_p}}{w_1 + w_2}$$

パラメタ  $\sigma$  の確信区間も、同様にして算出する。