

補足 2-8 確信区間の確率

通常の測度論的確率論に基づく統計的分析では、例えば最尤法の場合、データ D に対して尤度関数 $L(\theta|D) = p(D|\theta)$ を最大にするパラメタの値として θ を推定する。その場合の $\alpha \times 100\%$ 信頼区間は、パラメタの真値 θ_T に対するデータ生成モデル $p(D|\theta_T)$ によってデータ D が生成され、そのデータ D に対して算出された $\alpha \times 100\%$ 信頼区間が真値 θ_T を含む確率が α であるというものである。

ベイズ的方法の場合の確信区間は、次の確率(付録 H、式 (H.1))

$$p(D, \theta) = p(D|\theta)p(\theta)$$

に基づいて求められた事後確率

$$p(\theta|D) = \frac{p(\theta, D)}{p(D)} = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{\sum_{\theta} p(D|\theta)p(\theta)}$$

から決められる。すなわち、確信区間は事前確率 $p(\theta)$ に強く依存して決まるもので、最尤法におけるように真の値 θ_T を含む確率がサンプリングモデルに基づいて算出されているものではない。しかし、実際のデータ分析においては、求められた確信区間が真の値を含む確率がどのようなものであるか検討しておくことは重要である。岡本(2005b)は、この問題意識のもとで、3 件法恒常法データに対してベイズ的方法による確信区間がパラメタの真値を含む確率をシミュレーションによって調べている。恒常誤差 CE は 0、標準刺激値 60、比較刺激値 $x_i = 36 + i \times 3$, $i = 1, \dots, 15$ とし、 σ の真値が 3 あるいは 4、 c の真値も 3 あるいは 4 の場合について、推定値の性質および確信区間が μ 、 σ 、 c それぞれの真値を含む確率をシミュレーションにより推定している。各標準刺激を 20 回提示したときを 1 回の実験として 1000 実験を行い、各 1 回の実験において求め

られたパラメタの推定値 $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\sigma}$ および \hat{c} を事後確率の平均値として求め、これらそれぞれ 1000 個の推定値の平均と標準偏差を求めたものが表附 2 - 8.1 に示されている。P S E の推定値 $\hat{\mu}$ の平均値をみると、この値は弁別閾のパラメタ σ

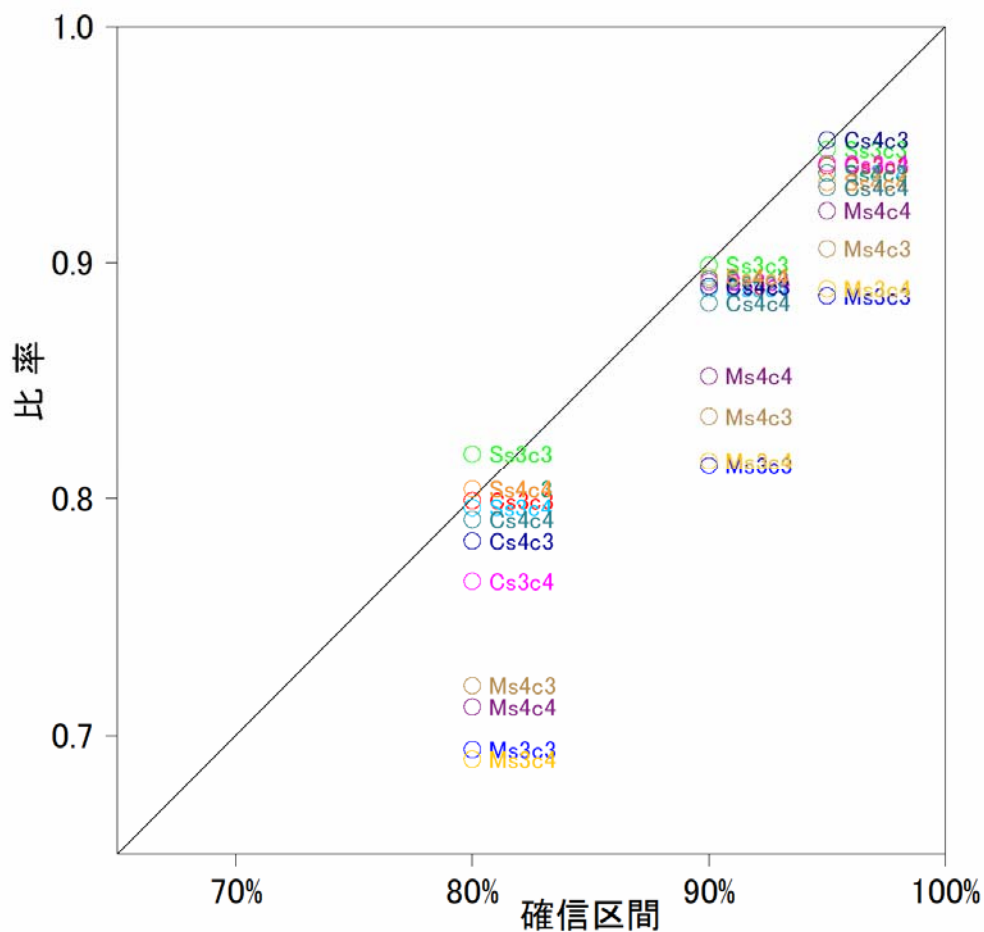
表附 2 - 8.1 パラメタ値 (真値) と推定値の平均値 ; () 内は標準偏差。上にバーの付いた $\bar{\sigma}$ などは、推定値 $\hat{\sigma}$ の平均値を表している。

		$\mu = 60$	
		σ	
		3.0	4.0
c	3.0	$\bar{\sigma} = 3.03(0.31)$ $\bar{c} = 3.02(0.32)$ $\bar{\mu} = 60.0(0.38)$	$\bar{\sigma} = 4.05(0.38)$ $\bar{c} = 3.03(0.36)$ $\bar{\mu} = 60.0(0.46)$
	4.0	$\bar{\sigma} = 3.04(0.32)$ $\bar{c} = 4.01(0.35)$ $\bar{\mu} = 60.0(0.36)$	$\bar{\sigma} = 4.03(0.37)$ $\bar{c} = 4.02(0.38)$ $\bar{\mu} = 60.0(0.43)$

および判断の基準値のパラメタ c の影響を受けずに安定して真の値 60 に十分近いことがわかる。弁別閾の推定値 $\hat{\sigma}$ および判断の基準値の推定値 \hat{c} の平均値をみると、これらの値はお互いに他の影響を受けずにそれぞれ真の値に十分近いことがわかる。以上の結果は、上のシミュレーションの場合、ベイズ的方法の平均値による推定値が、それら推定値の平均値が真の値に近いという意味でよい推定値であることを示しているといえる。

次に確信区間が真の値を含む確率を調べた結果を、表附 2 - 8.2a,b,c,d に示す。回数の欄には、それぞれの確信区間が真の値を含んだ頻度が示され、95%信頼区間の欄には、2項分布に基づいてそれらの頻度から算出された確信区間が真の値を含む確率の95%信頼区間が示されている。95%信頼区間は、おおむね当該の確信区間の確率値を含むかそれよりも小さい傾向が見られる。この

傾向は、確信区間が真値を含んだ比率を図示した図附 2 - 8.1 をみるとよくわかる。図中の（確信区間の確率、比率）を表す点の分布を見ると、対角線より下にあるものが多い。



図附 2 - 8.1 80%、90%および 95%確信区間に対して、真値がそれぞれの確信区間に含まれた比率。記号 $X_s Y_c Z$ は、 $X=M, S, C$ はそれぞれ PSE、 σ, c に対する比率であることを表し、 Y はシミュレーションにおける母数 σ の値、 Z は母数 c の値を表す。

表附 2 - 8.2 確信区間が真の値を含んだ頻度とその 95%信頼区間。

表付 2.8.2a $\mu = 60$ 、 $\sigma = 3$ 、 $c = 3$ の場合。

	80%確信区間		90%確信区間		95%確信区間	
	回数	95% 信 頼 区 間	回数	95% 信 頼 区 間	回数	95% 信 頼 区 間
μ	694	0.664 ~ 0.722	814	0.788 ~ 0.838	886	0.865 ~ 0.905
σ	819	0.794 ~ 0.842	899	0.879 ~ 0.917	948	0.932 ~ 0.961
c	799	0.773 ~ 0.823	890	0.869 ~ 0.909	941	0.925 ~ 0.955

表附 2 - 8.2b $\mu = 60$ 、 $\sigma = 3$ 、 $c = 4$ の場合。

	80%確信区間		90%確信区間		95%確信区間	
	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間
μ	690	0.660 ~ 0.719	816	0.791 ~ 0.840	889	0.868 ~ 0.908
σ	796	0.770 ~ 0.821	889	0.868 ~ 0.908	938	0.921 ~ 0.952
c	765	0.737 ~ 0.791	892	0.871 ~ 0.911	942	0.926 ~ 0.956

表附 2 - 8.2c $\mu = 60$ 、 $\sigma = 4$ 、 $c = 3$ の場合。

	80%確信区間		90%確信区間		95%確信区間	
	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間
μ	721	0.692 ~ 0.749	835	0.811 ~ 0.857	906	0.886 ~ 0.923
σ	804	0.778 ~ 0.828	893	0.872 ~ 0.911	938	0.921 ~ 0.952
c	782	0.755 ~ 0.807	890	0.869 ~ 0.909	952	0.937 ~ 0.964

表附 2 - 8.2d $\mu = 60$ 、 $\sigma = 4$ 、 $c = 4$ の場合。

	80%確信区間		90%確信区間		95%確信区間	
	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間	回数	95%信頼区間
μ	712	0.683 ~ 0.740	852	0.828 ~ 0.873	922	0.904 ~ 0.938
σ	804	0.778 ~ 0.828	894	0.873 ~ 0.912	934	0.917 ~ 0.949
c	791	0.764 ~ 0.816	883	0.861 ~ 0.902	932	0.915 ~ 0.947