補足 5－1　クロンバックの α 係数の証明

いま、M個の群からなるテストにおいて、第 i 群の問題の得点を X_i、$i=1,\cdots,M$ で表す。検査全体での得点 X は、これらM個の得点の和である。

$$X = X_1 + \cdots + X_M \qquad \text{（附 5—1.1）}$$

第 i 群の問題の得点 X_i における真の値を T_i、誤差を e_i とおき、

$$X_i = T_i + e_i \qquad \text{（附 5—1.2）}$$

と書けるとする。式（附 5—1.2）を式（附 5—1.1）に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} X &= (T_1 + e_1) + \cdots + (T_M + e_M) \\ &= (T_1 + \cdots + T_M) + (e_1 + \cdots + e_M) \\ &= T + e \end{aligned}$$

ここで、

$$T = T_1 + \cdots + T_M$$

は、得点 X における真の値を表し、

$$e = e_1 + \cdots + e_M$$

は誤差を表す。

いま、任意の２群、i 群と j 群、において

$$T_i - \mu_{T_i} = T_j - \mu_{T_j}$$

が成り立っているとする（豊田、1998、p.184）。ここで、μ_{T_i} および μ_{T_j} は、T_i および T_j の平均値を表す。上式における共通の値を T^* とおくと

$$T^* = T_1 - \mu_{T_1} = \cdots = T_M - \mu_{T_M}$$

となる。したがって、得点 X における真の値 T の分散 σ_T^2 は、次式で与えられる。

$$\sigma_T^2 = E\left[\left\{(T_1+\cdots+T_M)-(\mu_{T_1}+\cdots+\mu_{T_M})\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum\left(T_i-\mu_{T_i}\right)\right\}^2\right]$$

$$= E\left\{(M\cdot T^*)^2\right\}$$

$$= M^2\cdot E\left\{(T^*)^2\right\}$$

$$= M^2\sigma_{T^*}^2 \qquad \text{（附 5－1.3）}$$

ここで、$\sigma_{T^*}^2 = E\left\{(T^*)^2\right\}$は、$T^*$の分散を表す。$E(T^*)=0$に注意。

　また、

$$E\{(X_i-\mu_{T_i})(X_j-\mu_{T_j})\} = E\{(T_i+e_i-\mu_{T_i})(T_j+e_j-\mu_{T_j})\}$$

$$= E(T_i-\mu_{T_i})(T_j-\mu_{T_j})$$

$$= E(T^*)^2$$

$$= \sigma_{T^*}^2 \qquad \text{（附 5－1.4）}$$

が成り立つ。ここで、

$$E(X_i)=E(T_i)=\mu_{T_i}$$

および、誤差項e_iは他の変数と独立であると仮定されていることに注意。

　式（附 5－1.4）より、$\sigma_{T^*}^2$の推定値として、X_iとX_jの標本共分散s_{ij}を用いる。すなわち、$\sigma_{T^*}^2$の推定値を、すべての標本共分散s_{ij}の平均値として、次式で推定する。

$$\sigma_{T^*}^2 = \frac{1}{M(M-1)}\sum_{i\neq j}s_{ij} \qquad \text{（附 5－1.5）}$$

　上式において、iとjが異なるとするのは、$i=j$のときは

$$E(X_i-\mu_{T_i})^2 = E(T_i+e_i-\mu_{T_i})^2 = E(T^*)^2+E(e_i^2)$$

となり、誤差の分散も含まれるからである。

式（附 5−1.3）と（附 5−1.5）より、X の真の値 T の分散 σ_T^2 を、次式により推定する。

$$\sigma_T^2 = M^2 \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i \neq j} s_{ij} \qquad \text{（附 5−1.6）}$$

次に、X の分散 σ_X^2 について考える。まず、次式に注目する。

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E\{X - E(X)\}^2 \\ &= E\{(X_1 + \cdots + X_M) - (\mu_{T_1} + \cdots + \mu_{T_M})\}^2 \\ &= \sum_{i,j} E\{(X_i - \mu_{T_i})(X_j - \mu_{T_j})\} \end{aligned}$$

上式より、X の分散 σ_X^2 を、標本共分散 s_{ij} を用いて次式により推定する。

$$\sigma_X^2 = \sum_{i,j} s_{ij} \qquad \text{（附 5−1.7）}$$

ここで、s_{ii} は X_i の標本分散となっている。

式（附 5−1.6）および（附 5−1.7）より、信頼性係数を次式によって推定する。

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} \\ &= \frac{M^2 \dfrac{1}{M(M-1)} \sum_{i \neq j} s_{ij}}{\sum_{i,j} s_{ij}} \qquad \text{（附 5−1.8）} \\ &= \frac{M}{M-1} \cdot \frac{\sum_{i,j} s_{ij} - \sum_i s_{ii}}{\sum_{i,j} s_{ij}} \\ &= \frac{M}{M-1} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sum_i s_i^2}{s_X^2} \right\} \qquad \text{（附 5−1.9）} \end{aligned}$$

ここで、X_iの標本分散s_{ii}をs_i^2、Xの標本分散をs_X^2とおいた。

$$s_X^2 = \sum_{i,j} s_{ij}$$

である。

式（附 5―1.9）によって信頼性係数を推定する次式

$$\alpha = \frac{M}{M-1} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sum_i s_i^2}{s_X^2} \right\} \qquad (附\ 5―1.10)$$

で与えられる値が、アルファ係数あるいはクロンバック（Cronbach）のα係数と呼ばれているものである。式（附 5―1.10）は、式（5.7）と同じである。