

補足 5-2 クーダー・リチャードソンの公式の証明

各 X_i の値が正答 / 誤答などの 1 - 0 タイプであるとき、それぞれの確率を以下のようにおく。

$$p_i = \Pr(X_i = 1), \quad q_i = 1 - p_i = \Pr(X_i = 0)$$

このとき、 X_i の平均および分散は、以下のようになる。

$$E(X_i) = 1 \times p_i + 0 \times q_i = p_i$$

$$\text{Var}(X_i) = s_i^2$$

$$= \{1 - E(X_i)\}^2 \times p_i + \{0 - E(X_i)\}^2 \times q_i$$

$$= (1 - p_i)^2 p_i + (-p_i)^2 q_i$$

$$= q_i^2 p_i + p_i^2 q_i$$

$$= p_i q_i (p_i + q_i)$$

$$= p_i q_i \quad (\text{附 5 - 2.1})$$

式 (附 5 - 2.1) を式 (5.7) に代入して、次式を得る。

$$\alpha = \frac{M}{M-1} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sum_i p_i q_i}{s_x^2} \right\} \quad (\text{附 5 - 2.2})$$

式 (附 5 - 2.2) は、クーダー・リチャードソンの公式 (Kuder-Richardson formula, あるいは Kuder-Richardson formula 20、簡単に KR20) 式 (5.8) である。