補足 5−3 スピアマン・ブラウンの公式の証明

各問題の分散が等しく、問題間の相関係数が同じであるとする。すなわち、

$$Var(X_i) = \sigma^2 \qquad (附 5-3.1)$$

$$Cor(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{Var(X_i) \cdot Var(X_j)}} = \rho_{cor} \qquad (附 5-3.2)$$

とおく。ここで、σ^2 は共通の分散を表し、ρ_{cor} は共通の相関係数を表す。

式（附 5−3.1）および（附 5−3.2）より、

$$Cov(X_i, X_j) = \rho_{cor} \cdot \sqrt{\sigma^2 \sigma^2} = \rho_{cor} \sigma^2$$

を得る。

よって、次式の推定式

$$s_{ij} = Cov(X_i, X_j) = \rho_{cor} \sigma^2$$

および

$$s_{ii} = Var(X_i) = \sigma^2$$

を、信頼性係数を求める式（附 5−1.8）に代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\sigma_T^2}{\sigma_X^2} \\
&= \frac{M^2 \dfrac{1}{M(M-1)} \sum_{i \neq j} s_{ij}}{\sum_{i,j} s_{ij}} \\
&= \frac{\dfrac{M}{M-1} M(M-1) \rho_{cor} \sigma^2}{M(M-1) \rho_{cor} \sigma^2 + M\sigma^2} \\
&= \frac{M^2 \rho_{cor}}{M(M-1) \rho_{cor} + M}
\end{aligned}$$

$$= \frac{M\rho_{cor}}{1+(M-1)\rho_{cor}}$$

上式は、スピアマン・ブラウンの公式（式（5.9））である。