補足 5－4 項目数と信頼性係数の関係

信頼性係数は、内的整合性が低いときでも、項目数がある程度多ければ高い値をとることとは、以下に示すように理解できる。

いま、N 個の項目からなる尺度を考える。各項目を

$$X_i = T_i + e_i、\ i = 1, \cdots, N$$

と、真の値 T_i と誤差 e_i とに分けて表わす。簡単のため、

$$T_i = T$$

とし、T は平均値 μ、分散 σ_T^2 の分布に従うとする。e_i は平均値０、分散 σ_e^2 の分布に従い、各 e_i は他の変数 T および e_j と独立であるとする。

尺度得点 X は、N 個の項目の和である。

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \cdots + X_N \\ &= (T_1 + e_1) + \cdots + (T_N + e_N) \\ &= (T_1 + \cdots + T_N) + (e_1 + \cdots + e_N) \\ &= T^* + e^* \end{aligned}$$

上式において、

$$T^* = T_1 + \cdots + T_N$$

は、尺度得点 X における真の値を表し、

$$e^* = e_1 + \cdots + e_N$$

は誤差を表すものである。

このとき、尺度得点 X の分散は次のようになる。

$$Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)$$

$$= E\left[\left\{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) - E\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right)\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{\sum_i (T + e_i) - N\mu\right\}^2\right]$$

$$= E\left\{\left(NT + \sum_{i=1}^{N} e_i - N\mu\right)^2\right\}$$

$$= E\left[\left\{N(T-\mu) + \sum_{i=1}^{N} e_i\right\}^2\right]$$

$$= N^2 \cdot E\left\{(T-\mu)^2\right\} + \sum_{i=1}^{N} E(e_i^2)$$

$$= N^2 \sigma_T^2 + N\sigma_e^2$$

尺度得点Xの真の値T^*の分散は次式で与えられる。

$$Var(T^*) = Var\left(\sum_i T_i\right)$$

$$= E\left[\left\{\left(\sum_i T_i\right) - N\mu\right\}^2\right]$$

$$= E\left[\left\{N(T-\mu)\right\}^2\right]$$

$$= N^2 \sigma_T^2$$

したがって、信頼性係数ρは次式で与えられる。

$$\rho = \frac{Var(T^*)}{Var(X)} = \frac{N^2\sigma_T^2}{N^2\sigma_T^2 + N\sigma_e^2} = \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2 + \frac{1}{N}\sigma_e^2}$$

上式において

$$N \to \infty$$

のとき

$$\rho \to \frac{\sigma_T^2}{\sigma_T^2} = 1$$

となる。項目数Nを増やすと足し合わされる真値T_iと誤差項e_iの数が増えるが、誤差項の方はお互いに独立なので打ち消し合う傾向があり、真値$T^* = \sum T_i$の比率が大きくなっていく。