補足 5−5 希薄化の式の証明

希薄化の式は、以下のように導くことができる。

測定値 x および y を

$$x = t_x + e_x$$

$$y = t_y + e_y$$

と表す。ここで、t_x および t_y は真の値であり、e_x および e_y は誤差である。誤差 e_x および e_y は、それ自身以外のものと独立であるとする。t_x および t_y の平均値を μ_x および μ_y とおき、e_x および e_y の平均値は 0 であるとする。このとき、測定値 x と y との共分散 $Cov(x, y)$ は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Cov(x, y) &= E\{(x - \mu_x)(y - \mu_y)\} \\ &= E[\{(t_x - \mu_x) + e_x\}\{(t_y - \mu_y) + e_y\}] \\ &= E\{(t_x - \mu_x)(t_y - \mu_y)\} \\ &= Cov(t_x, t_y) \end{aligned}$$

x の分散は、次式で表される。

$$\sigma_x^2 = E\left[(x - \mu_x)^2\right] = E\left\{(t_x - \mu_x)^2\right\} + E\left(e_x^2\right) = \sigma_{t_x}^2 + \sigma_{e_x}^2$$

y の分散も同様に次式となる。

$$\sigma_y^2 = \sigma_{t_y}^2 + \sigma_{e_y}^2$$

また、定義より、x と y の相関係数 ρ_{xy} は次式で与えられる。

$$\rho_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{\sigma_y^2}}$$

xおよびyの信頼性係数ρ_xおよびρ_yは、次式で与えられる。

$$\rho_x = \frac{\sigma_{t_x}^2}{\sigma_x^2}、\qquad \rho_y = \frac{\sigma_{t_y}^2}{\sigma_y^2}$$

以上より、xおよびyの真の得点t_xおよびt_yの間の相関係数$\rho_{t_x t_y}$は、次式のように表される。

$$\begin{aligned}\rho_{t_x t_y} &= \frac{Cov(t_x, t_y)}{\sqrt{\sigma_{t_x}^2}\sqrt{\sigma_{t_y}^2}} \\ &= \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{\rho_x\sigma_x^2}\sqrt{\rho_y\sigma_y^2}} \\ &= \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{\sigma_y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho_x\rho_y}} \\ &= \frac{\rho_{xy}}{\sqrt{\rho_x}\sqrt{\rho_y}} \qquad \text{（S 5－5.1）}\end{aligned}$$

上式より次式の希薄化の式を得る。

$$\left|\rho_{xy}\right| = \left|\rho_{t_x t_y}\sqrt{\rho_x}\sqrt{\rho_y}\right| \le \left|\rho_{t_x t_y}\right|$$