

補足 6-2 EMアルゴリズムにおける計算

式 (6.17)

$$E(\log L) = \sum_{j=1}^q \left(\sum_{k=1}^N \log L_j \cdot P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right) \quad (6.17)$$

は、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} E(\log L) &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N (\log L_j) P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n \left\{ u_{ij} \log P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) + (1 - u_{ij}) \log Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \log g(\theta_j = X_k | \pi) \right] \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \quad (\text{附 6-2.1}) \end{aligned}$$

上式において $\theta_j = X_k$ とあるのは、 θ_j が値 X_k をとる場合を明記したものである。また、

$\theta_{j|X_k}$ は、値 X_k をとったときの θ_j を表す。 $P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)$ は、正答確率 $P_i(\theta_{j|X_k})$ において項目パラメタ $\xi_i = (a_i, b_i, c_i)$ を明記したものである。したがって、例えば

$$P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-1.7 \times a_i (\theta_{j|X_k} - b_i)}}$$

である。ただし、以下では、式変形に現れる定数 1.7 の煩雑さを避けるため

$$P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i (\theta_{j|X_k} - b_i)}}$$

の形を用いる。

式 (附 6-2.1) をさらに変形して、

$$\begin{aligned} E(\log L) &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n \left\{ u_{ij} \log P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) + (1 - u_{ij}) \log Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \log g(\theta_j = X_k | \pi) \cdot P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$= F(\xi) + G(\pi)$$

とおく。

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^n \left\{ u_{ij} \log P_i(\theta_j | X_k | \xi_i) + (1 - u_{ij}) \log Q_i(\theta_j | X_k | \xi_i) \right\} \right] \right. \\ \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\}$$

は ξ の関数であって、 π には依存していない。一方

$$G(\pi) = \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \log g(\theta_j = X_k | \pi) \cdot P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \quad (\text{附6-2.2})$$

は π の関数であって、 ξ には依存していない。したがって、 $E(\log L)$ の最大化は、 $F(\xi)$ の ξ のみに関する最大化と、 $G(\pi)$ の π のみに関する最大化に分けて、それぞれ独立に行うことができる。

まず、 $G(\pi)$ の最大化について考える。この関数に現れる $g(\theta_j = X_k | \pi)$ は、被験者 j の能力 θ_j が X_k という値をとる確率を表すが、被験者の反応パターン \mathbf{u}_j が条件として付いていないので、一般に被験者の能力が X_k である確率を表していることになる。したがって、 θ_j から添え字 j をとって、

$$g(\theta = X_k | \pi)$$

と表すことができる。このとき、式(附6-2.2)は、以下のようなになる。

$$G(\pi) = \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \log g(\theta = X_k | \pi) \cdot P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\ = \sum_{k=1}^q \left\{ \log g(\theta = X_k | \pi) \cdot \sum_{j=1}^N P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\}$$

いま、

$$\bar{f}_k = \sum_{j=1}^N P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi})$$

とおくと、次式となる。

$$G(\pi) = \sum_{k=1}^q \log g(\theta = X_k | \pi) \cdot \bar{f}_k$$

上式を最大にする $\pi_k = g(\theta = X_k | \boldsymbol{\pi})$ は、次式で与えられることが知られている (e.g. Cover and Thomas, 1991)。

$$\pi_k = g(\theta = X_k | \boldsymbol{\pi}) = \frac{\bar{f}_k}{\sum_{h=1}^q \bar{f}_h}$$

次に、 $F(\boldsymbol{\xi})$ の最大化を考える。極値探索法を用いることにすると、1 次の偏導関数を求めておけば数値計算法で知られている方法を用いることができる (付録 E 参照)。 $F(\boldsymbol{\xi})$ の偏導関数は、以下のように与えられる。

まず、 a_i による偏微分を考える。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\boldsymbol{\xi})}{\partial a_i} &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ u_{ij} \log P_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i) + (1 - u_{ij}) \log Q_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i) \right\} \right] \right. \\ &\quad \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[u_{ij} \frac{\frac{\partial}{\partial a_i} P_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i)} + (1 - u_{ij}) \frac{\frac{\partial}{\partial a_i} Q_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i)}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i)} \right] \right. \\ &\quad \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \hat{\boldsymbol{\pi}}) \right\} \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} P_i(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i) &= \frac{\partial}{\partial a_i} \left\{ c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)}} \right\} \\ &= (1 - c_i) \cdot \frac{-e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)} \{ -(\theta_{j|X_k} - b_i) \}}{\{ 1 + e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)} \}^2} \\ &= (1 - c_i) (\theta_{j|X_k} - b_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)}} \cdot \frac{e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)}}{1 + e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)}} \\ &= (1 - c_i) (\theta_{j|X_k} - b_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \boldsymbol{\xi}_i) \end{aligned}$$

である。ただし、

$$P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_{j|X_k} - b_i)}}$$

$$Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) = 1 - P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i)$$

とおいた。

また、

$$\frac{\partial}{\partial a_i} Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) = -\frac{\partial}{\partial a_i} P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)$$

である。

以上より、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & u_{ij} \frac{\frac{\partial}{\partial a_i} P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} + (1 - u_{ij}) \frac{\frac{\partial}{\partial a_i} Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \\ &= u_{ij} \cdot P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)^{-1} \cdot (1 - c_i)(\theta_{j|X_k} - b_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \\ & \quad - (1 - u_{ij}) \cdot Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)^{-1} \cdot (1 - c_i)(\theta_{j|X_k} - b_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \\ &= (1 - c_i)(\theta_{j|X_k} - b_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot \left\{ \frac{u_{ij}}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} - \frac{1 - u_{ij}}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \right\} \\ &= (1 - c_i)(\theta_{j|X_k} - b_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot \frac{u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \\ &= (1 - c_i) \cdot (u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)) \cdot W_{ik}(\xi_i) \cdot (\theta_{j|X_k} - b_i), \end{aligned}$$

ここで、

$$W_{ik}(\xi_i) = \frac{P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}$$

とおいた。

したがって、 a_i による偏導関数は、 $\theta_{j|X_k} = X_k$ に注意して、以下のように与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial a_i} F(\xi)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[(1-c_i) \cdot (u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)) \cdot W_{ik}(\xi_i) \cdot (\theta_{j|X_k} - b_i) \right] \right. \\
&\quad \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\
&= (1-c_i) \sum_{k=1}^q \left[(X_k - b_i) \left\{ \sum_{j=1}^N \left[u_{ij} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \cdot P(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right] \right\} \times W_{ik}(\xi_i) \right] \\
&= (1-c_i) \sum_{k=1}^q \left[(X_k - b_i) \left[\bar{r}_{ik} - \bar{f}_k P_i(X_k | \xi_i) \right] W_{ik}(\xi_i) \right] \quad (\text{附6-2.3})
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{ik} &= \sum_{j=1}^N u_{ij} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \\
\bar{f}_k &= \sum_{j=1}^N P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi})
\end{aligned}$$

であり、 $P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi})$ は次式で与えられるものである。

$$P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) = \frac{P(\mathbf{u}_j | \theta_j = X_k, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \cdot P(\theta_j = X_k | \hat{\pi})}{\sum_{k=1}^q P(\mathbf{u}_j | \theta_j = X_k, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \cdot P(\theta_j = X_k | \hat{\pi})}$$

いま、

$$\begin{aligned}
L_j(X_k) &= P(\mathbf{u}_j | \theta_j = X_k, \hat{\xi}, \hat{\pi}) = P(\mathbf{u}_j | \theta_j = X_k, \hat{\xi}) \\
&= \prod_{i=1}^n P_i(\theta_{j|X_k} | \hat{\xi}_i)^{u_{ij}} \cdot Q_i(\theta_{j|X_k} | \hat{\xi}_i)^{1-u_{ij}}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) = \frac{L_j(X_k) \cdot P(\theta_j = X_k | \hat{\pi})}{\sum_{k=1}^q L_j(X_k) \cdot P(\theta_j = X_k | \hat{\pi})}$$

と書ける。

b_i による偏導関数も、同様にして導くことができる。

$$\frac{\partial F(\xi)}{\partial b_i} = \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial}{\partial b_i} \left\{ u_{ij} \log P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) + (1-u_{ij}) \log Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right\} \right] \right. \\ \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\}$$

上式において、まず正答確率の偏導関数を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_i} P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) &= \frac{\partial}{\partial b_i} \left\{ c_i + (1-c_i) \frac{1}{1+e^{-a_i(\theta_{j|X_k}-b_i)}} \right\} \\ &= (1-c_i) \frac{-1 \times e^{-a_i(\theta_{j|X_k}-b_i)} \times a_i}{\left\{ 1+e^{-a_i(\theta_{j|X_k}-b_i)} \right\}^2} \\ &= (1-c_i)(-a_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \end{aligned}$$

次式

$$\frac{\partial}{\partial b_i} Q(\theta, \xi) = -\frac{\partial}{\partial b_i} P(\theta, \xi)$$

に注意して、以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\xi)}{\partial b_i} &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[u_{ij} \frac{1}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} (1-c_i)(-a_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} (1-c_i)a_i P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right] \right. \\ &\quad \left. \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[(1-c_i)(-a_i) \cdot P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left\{ \frac{u_{ij}}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} - \frac{1-u_{ij}}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \right\} \right] \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\ &= -a_i(1-c_i) \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N P_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \Big\} \\
& = -a_i(1-c_i) \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N W_{ik}(\xi_i) \cdot (u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)) P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\
& = -a_i(1-c_i) \left\{ \sum_{k=1}^q \left[\sum_{j=1}^N u_{ij} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - P_i(X_k | \xi_i) \cdot P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right] W_{ik}(\xi_i) \right\} \\
& = -a_i(1-c_i) \left\{ \sum_{k=1}^q [\bar{r}_{ik} - \bar{f}_k P_i(X_k | \xi_i)] \times W_{ik}(\xi_i) \right\} \tag{附6-2.4}
\end{aligned}$$

c_i による偏導関数も、同様にして以下のように導くことができる。
まず、次式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial c_i} P_i(\theta | \xi_i) &= \frac{\partial}{\partial c_i} \left\{ c_i + (1-c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta-b_i)}} \right\} \\
&= 1 - \frac{1}{1 + e^{-a(\theta-b)}} \\
&= Q_i^*(\theta | \xi_i) \\
\frac{\partial}{\partial c_i} Q_i(\theta | \xi_i) &= -Q_i^*(\theta | \xi_i)
\end{aligned}$$

に注意すると、以下の式が導かれる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F(\xi)}{\partial c_i} &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \left[u_{ij} \frac{1}{P(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \cdot Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \cdot (-Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i)) \right] \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right. \\
& \quad \left. \times \left\{ \frac{u_{ij}}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} - \frac{1-u_{ij}}{Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} \right\} \times P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N Q_i^*(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \right. \\
&\quad \left. \times \frac{u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i) \cdot Q_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \quad (\text{附 6 - 2.5})
\end{aligned}$$

ここで、 $P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)$ などを簡単に P などと表したとき、次式の関係

$$\begin{aligned}
Q &= 1 - P = 1 - \{c + (1-c)P^*\} = 1 - c - (1-c)P^* \\
&= (1-c)(1-P^*) = (1-c)Q^*
\end{aligned}$$

$$\frac{Q^*}{PQ} = \frac{Q^*}{P(1-c)Q^*} = \frac{1}{(1-c)P}$$

が成り立っていることに注意すると、式 (附 6 - 2.5) は以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
\text{式 (附 6 - 2.5)} &= \sum_{k=1}^q \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{u_{ij} - P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)}{(1-c_i) \cdot P_i(\theta_{j|X_k} | \xi_i)} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right\} \\
&= \frac{1}{1-c_i} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[\sum_{j=1}^N \left[\frac{u_{ij} P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi})}{P_i(X_k | \xi_i)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - P(\theta_j = X_k | \mathbf{u}_j, \hat{\xi}, \hat{\pi}) \right] \right] \right\} \\
&= \frac{1}{(1-c_i)} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[\frac{\bar{r}_{ik}}{P(X_k, \xi)} - \bar{f}_k \right] \right\} \\
&= \frac{1}{(1-c_i)} \left\{ \sum_{k=1}^q \left[\frac{\bar{r}_{ik} - \bar{f}_k P(X_k, \xi)}{P(X_k, \xi)} \right] \right\} \quad (\text{附 6 - 2.6})
\end{aligned}$$

上の偏導関数 (附 6 - 2.3) (附 6 - 2.4) (附 6 - 2.6) は、周辺尤度関数の偏微分から導かれるものと同じ形のものである (Baker and Kim, 2004, p. 168)。