2004.3
Y. Okamoto

モデルの適合度と比較

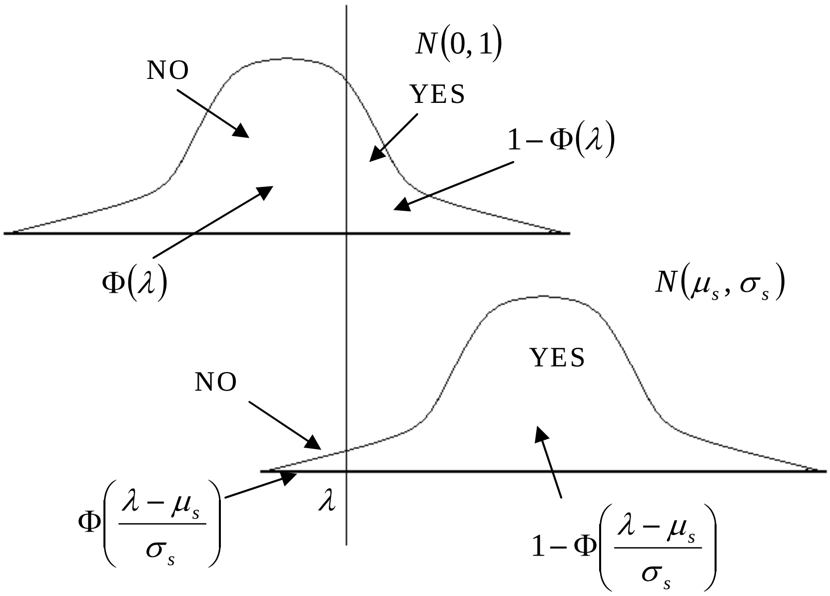

図１　ノイズとシグナルに対する分布

表１　観測度数

	YES	NO
シグナル	$SYes_i$	SNO_i
ノイズ	$NYes_i$	NNo_i

シグナルおよびノイズに対する YES および NO の反応数が表１のようであるときの尤度を次式で与える。

$$L=\prod\left[\Phi(\lambda_i)^{NNo_i}\cdot\{1-\Phi(\lambda_i)\}^{NYes_i}\cdot\Phi\left(\frac{\lambda_i-\mu_s}{\sigma_s}\right)^{SNo_i}\cdot\left\{1-\Phi\left(\frac{\lambda_i-\mu_s}{\sigma_s}\right)\right\}^{SYes_i}\right]$$

ここで、

$$\Phi(\lambda)=\int_{-\infty}^{\lambda}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\int_{-\infty}^{\lambda}\phi(x)dx$$

である。

したがって、対数尤度は次式で与えられる。

$$l = \log L = \sum \left[NNo_i \cdot \log \Phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \log\{1 - \Phi(\lambda_i)\} \right.$$

$$\left. + SNo_i \cdot \log \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) + SYes_i \cdot \log\left\{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \right]$$

対数尤度の偏導関数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = \sum \left[NNo_i \cdot \frac{1}{\Phi(\lambda_i)} \cdot \phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi(\lambda_i)} \cdot \{-\phi(\lambda_i)\} \right.$$

$$+ SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_i}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s}$$

$$\left. + SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_i}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s}\right\} \right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-1}{\sigma_s} \right.$$

$$\left. + SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \cdot \frac{-1}{\sigma_s} \right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_s)}{\sigma_s^2} \right.$$

$$+SYes_i \cdot \frac{1}{1-\Phi\left(\dfrac{\lambda_i-\mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\dfrac{\lambda_i-\mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \cdot \frac{-(\lambda_i-\mu_i)}{\sigma_s^2} \Bigg]$$

プログラム PCompModels.exe では、対数尤度$l=\log L$を最大にする極値探索を偏導関数を用いない Brent (1973) の方法によって行っている。プログラム PCompModels.exe を起動すると図２のフォームが表示される。データ数に合わせてグリッドの行数を調節する。「追加」ボタンのクリックでアクティブなセルを含む行の下に空白の行が挿入される。セ

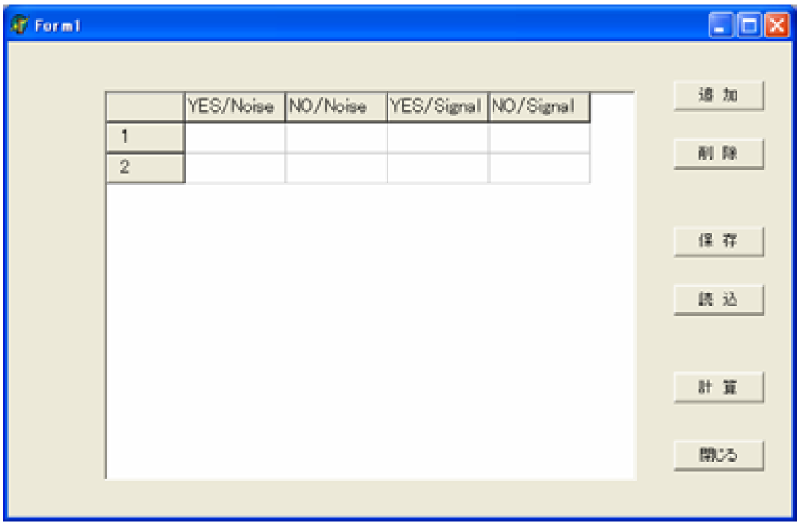

図２　起動時のフォーム

ルはクリックによりアクティブになる。「削除」ボタンのクリックでアクティブなセルを含

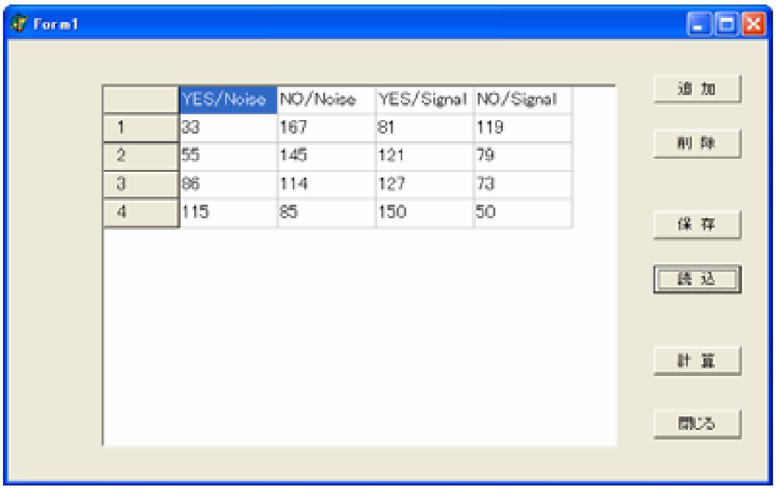

図３　データの設定

む行が削除される。

図３は、書籍の図 4.1 におけるデータを設定したものである。設定されたデータは「保存」ボタンのクリックでファイルに保存することができる。ファイルは CSV 形式で保存されるので Excel によって開くこともできる。ファイルとして保存されたデータは「読込」ボタンのクリックでストリンググリッド内に読み込むことができる。「保存」ボタンのクリックで保存されるデータの形式に合わせて Excel によって作成されたデータも CSV 形式で保存しておけば「読込」ボタンのクリックで読み込むことができる。

図３のようにデータを設定した後、「計算」ボタンをクリックすると最尤法によるパラメタの推定が行われ、図４のように計算結果が表示される。

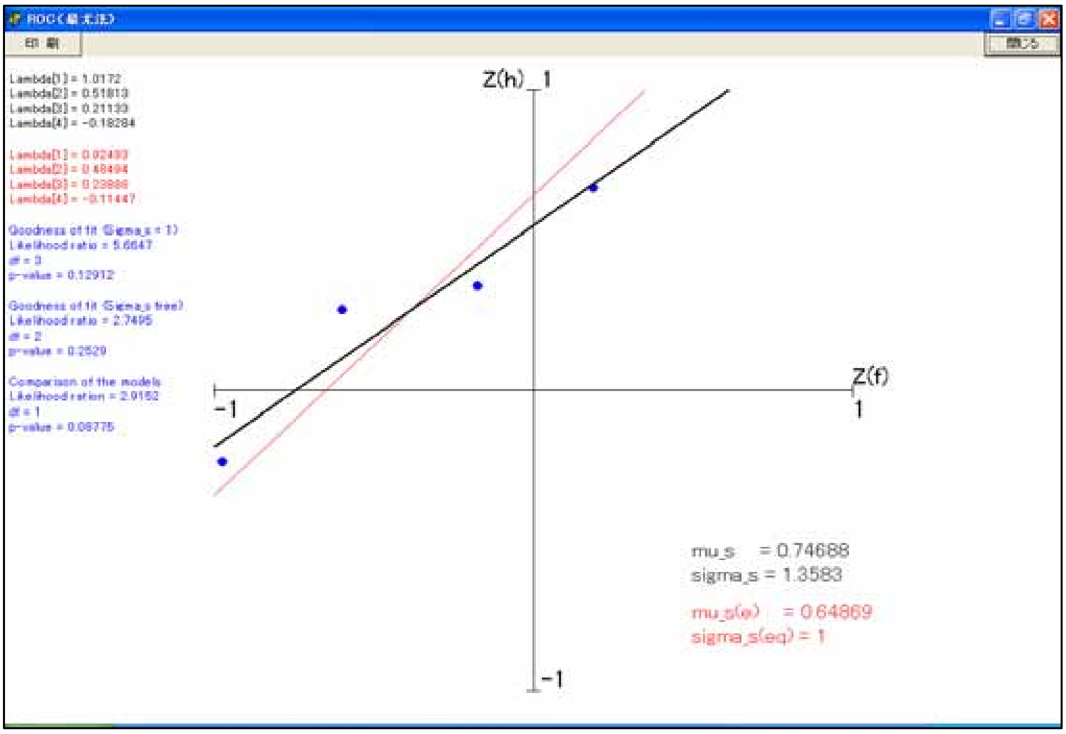

図４　計算結果の表示

赤色で表示されているのは等分散ガウス型モデルに対する推定値と ROC 直線である。図４における

mu_s(e) = 0.64869

sigma_s(eq) = 1

は、等分散ガウス型モデル（$\sigma_n = \sigma_s = 1$、すなわち sigam_s(eq)=1）では

$$\hat{d}' = \hat{\mu}_s = 0.64869$$

であることを表している。このときの基準値は画面の左上に

Lambda[1]=0.92492

Lambda[2]=0.48494

Lambda[3]=0.23887

Lambda[4]=-0.11447

と表示されているが、これは

$$\hat{\lambda}_1 = 0.92492$$

$$\hat{\lambda}_2 = 0.48494$$

$$\hat{\lambda}_3 = 0.23887$$

$$\hat{\lambda}_4 = -0.11447$$

であることを表している。

不等分散ガウス型モデルに対する推定値と ROC 直線は黒色で表示されている。図４における

mu_s = 0.74688

sigma_s = 1.3583

は、

$$\hat{\mu}_s = 0.74688$$
$$\hat{\sigma}_s = 1.3583$$

であることを表している。

適合度指標は、等分散ガウス型モデルに対しては

Goodness of fit (Sigma_s = 1)

Likelihood ratio = 5.6647

df = 3

p-value = 0.12912

と表示されている。すなわち、

$$G^2 = 5.6647$$

であり、自由度

$$df = 3$$

に対して、

$$P\left(\chi^2 > 5.6647\right) = 0.12912$$

である。

不等分散ガウス型モデルに対しては、

Goodness of fit (Sigma_s free)
Likelihood ratio = 2.7495
df = 2
p-value = 0.2529

と表示されていて、これは以下のことを表している。

$$G^2 = 2.7495$$
$$df = 2$$
$$P(\chi^2 > 2.7495) = 0.2529$$

２つのモデルの比較は

Comparison of the models
Likelihood ratio = 2.9152
df = 1
p-value = 0.08775

と表されている。これは

$$G^2 = 2.9152$$
$$df = 1$$
$$P(\chi^2 > 2.9152) = 0.08775$$

ということである。

参考文献

Brent, R. P. 1973　*Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall, Inc.

Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1968 Maximum likelihood estimation of parameters of signal detection theory – A direct solution. *Psychometrika*.

Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1969 Maximum-likelihood estimation of parameters of signal-detection theory and determination of confidence intervals – Rating-method data. *Journal of Mathematical Psychology.*

2004.3
Y. Okamoto

Rao, S. S. 1984 *Optimization: Theory and Applications (Second Edition).* John Wiley & Sons.