

問 3.4 用のプログラム

最尤法

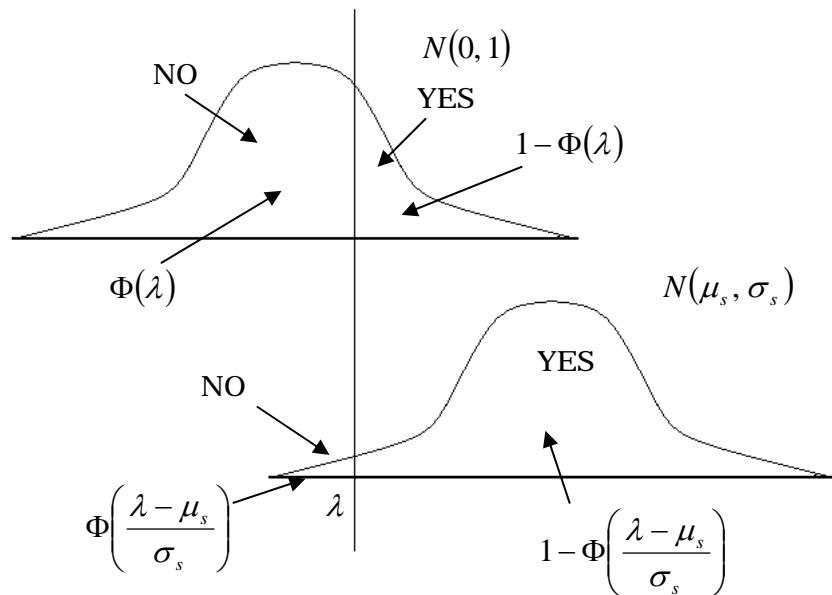


図 1 ノイズとシグナルに対する分布

表 1 観測度数

	YES	NO
シグナル	$SYes_i$	SNO_i
ノイズ	$NYes_i$	NNo_i

シグナルおよびノイズに対する YES および NO の反応数が表 1 のようであるときの尤度を次式で与える。

$$L = \prod \left[\Phi(\lambda_i)^{NNo_i} \cdot \{1 - \Phi(\lambda_i)\}^{NYes_i} \cdot \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)^{SNo_i} \cdot \left\{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\}^{SYes_i} \right]$$

ここで、

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(x) dx$$

である。

したがって、対数尤度は次式で与えられる。

$$l = \log L = \sum \left[NNo_i \cdot \log \Phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \log \{1 - \Phi(\lambda_i)\} \right. \\ \left. + SNo_i \cdot \log \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) + SYes_i \cdot \log \left\{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \right]$$

対数尤度の偏導関数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = \sum \left[NNo_i \cdot \frac{1}{\Phi(\lambda_i)} \cdot \phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi(\lambda_i)} \cdot \{-\phi(\lambda_i)\} \right]$$

$$+ SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s} \\ + SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s}\right\}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-1}{\sigma_s} \right. \\ \left. + SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \cdot \frac{-1}{\sigma_s} \right]$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_s)}{\sigma_s^2} \right. \\ \left. + SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\} \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_s)}{\sigma_s^2} \right]$$

$$+ SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left[-\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_i)}{\sigma_s^2} \right]$$

プログラム PCalcParam.exe では、対数尤度 $l = \log L$ を最大にする極値探索を偏導関数を用いない Brent (1973) の方法によって行っている。プログラム PCalcParam.exe を起動すると図 2 のフォームが表示される。データ数に合わせてグリッドの行数を調節する。「追加」ボタンのクリックでアクティブなセルを含む行の下に空白の行が挿入される。セルは

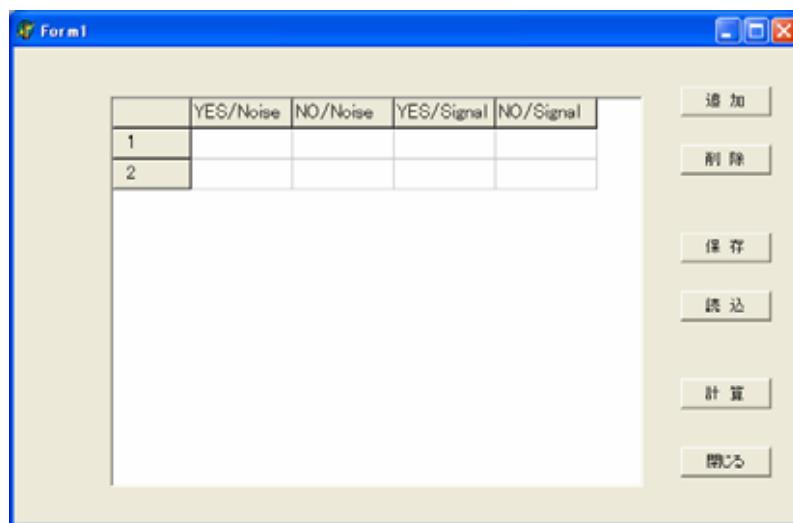


図 2 起動時のフォーム

クリックによりアクティブになる。「削除」ボタンのクリックでアクティブなセルを含む行

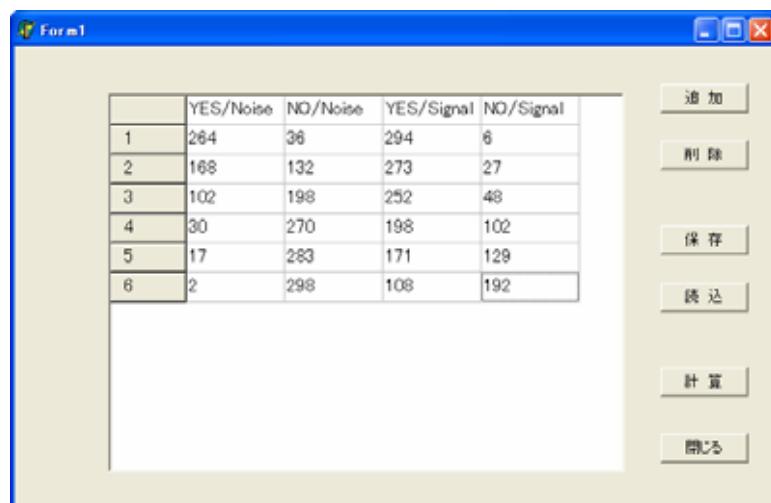


図 3 データの設定

が削除される。

図3は、問3.3のデータを設定したものである。設定されたデータは「保存」ボタンのクリックでファイルに保存することができる。ファイルは CSV 形式で保存されるので Excel によって開くこともできる。ファイルとして保存されたデータは「読み込」ボタンのクリックでストリンググリッド内に読み込むことができる。「保存」ボタンのクリックで保存されるデータの形式に合わせて Excel によって作成されたデータも CSV 形式で保存しておけば「読み込」ボタンのクリックで読み込むことができる。

図3のようにデータを設定した後、「計算」ボタンをクリックすると最尤法によるパラメタの推定が行われ、図4のように計算結果が表示される。

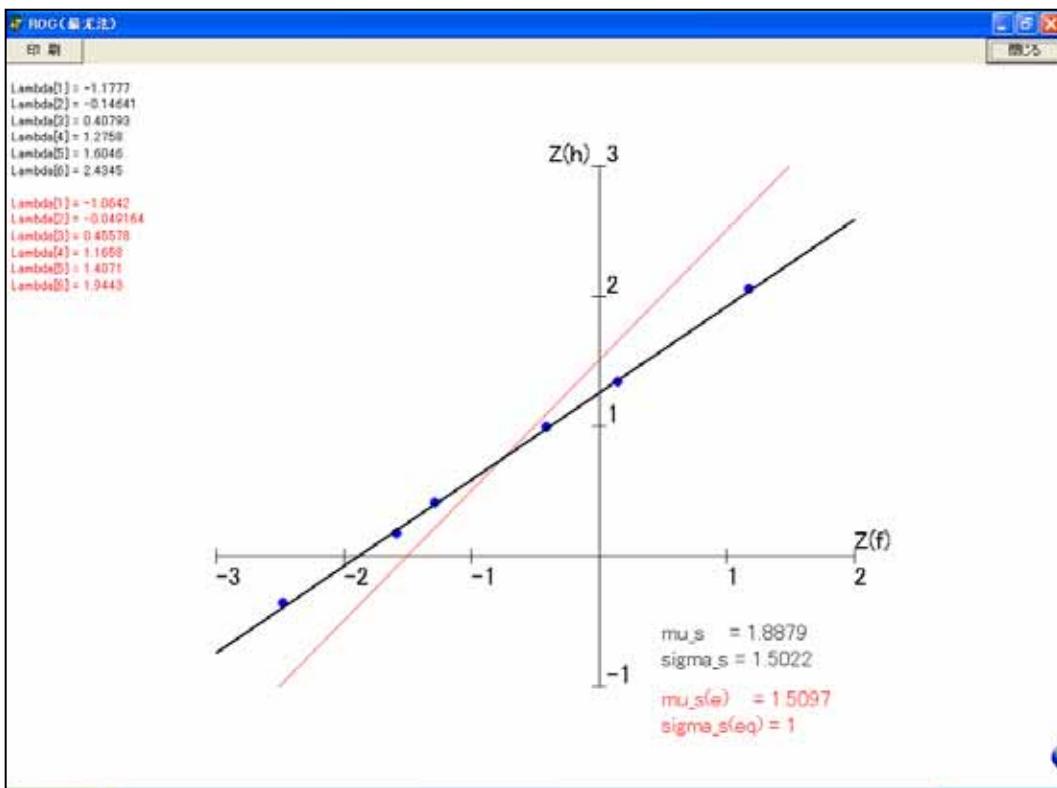


図4 計算結果の表示

赤色で表示されているのは等分散ガウス型モデルに対する推定値と ROC 直線である。図4における

$$\mu_s(e) = 1.5097$$

$$\sigma_s(eq) = 1$$

は、等分散ガウス型モデル ($\sigma_n = \sigma_s = 1$ 、すなわち $\sigma_s(eq) = 1$) では

$$\hat{d}' = \hat{\mu}_s = 1.5097$$

であることを表している。このときの基準値は画面の左上に

```
Lambda[1]=-1.0642
Lambda[2]=-0.049164
Lambda[3]=0.45578
Lambda[4]=1.1658
Lambda[5]=1.4071
Lambda[6]=1.9443
```

と表示されているが、これは

$$\hat{\lambda}_1 = -1.0642$$

$$\hat{\lambda}_2 = -0.049164$$

$$\hat{\lambda}_3 = 0.45578$$

$$\hat{\lambda}_4 = 1.1658$$

$$\hat{\lambda}_5 = 1.4071$$

$$\hat{\lambda}_6 = 1.9443$$

であることを表している。

不等分散ガウス型モデルに対する推定値と ROC 直線は黒色で表示されている。図 4 における

```
mu_s = 1.8879
sigma_s = 1.5022
```

は、

$$\hat{\mu}_s = 1.8879$$
$$\hat{\sigma}_s = 1.5022$$

であることを表している。

参考文献

- Brent, R. P. 1973 *Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall, Inc.
- Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1968 Maximum likelihood estimation of parameters of signal detection theory – A direct solution. *Psychometrika*.
- Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1969 Maximum-likelihood estimation of parameters of signal-detection theory and determination of confidence intervals – Rating-method data. *Journal of Mathematical Psychology*.
- Rao, S. S. 1984 *Optimization: Theory and Applications (Second Edition)*. John Wiley & Sons.