2004.2
岡本安晴

プログラム PROCGaussNE.exe について

プログラム PROCGaussNE.exe は、ＲＯＣ直線とデータ点$\left(Z\left(f_i\right), Z\left(h_i\right)\right)$との距離の２乗和が最小になるように、パラメタ$\mu_s$と$\sigma_s$の値を求めるものである。直線

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=1 \tag{1}$$

と、点(u,v)との距離は

$$\frac{\left|\left(x_0-u-\frac{x_0}{y_0}v\right)\left(y_0-v-\frac{y_0}{x_0}u\right)\right|}{\sqrt{\left(x_0-u-\frac{x_0}{y_0}v\right)^2+\left(y_0-v-\frac{y_0}{x_0}u\right)^2}} \tag{2}$$

で与えられる（証明は付録を参照)。Ｎ個のデータ点$\left(Z\left(f_i\right), Z\left(h_i\right)\right)$が与えられたとき、点と直線（１）との距離（２）の２乗和

$$SS\left(x_0, y_0\right)=\sum_{i=1}^{N}\frac{\left(x_0-Z\left(f_i\right)-\frac{x_0}{y_0}Z\left(h_i\right)\right)^2\left(y_0-Z\left(h_i\right)-\frac{y_0}{x_0}Z\left(f_i\right)\right)^2}{\left(x_0-Z\left(f_i\right)-\frac{x_0}{y_0}Z\left(h_i\right)\right)^2+\left(y_0-Z\left(h_i\right)-\frac{y_0}{x_0}Z\left(f_i\right)\right)^2}$$

を最小にするものとしてパラメタx_0とy_0（ガウス座標におけるＲＯＣ直線のｘ切片とｙ切片）の値を求め、これらの値からパラメタμ_sとσ_sの値を算出する。等分散ガウス型モデルの場合は、$\sigma_s=\sigma_n=1$の制約条件の下でパラメタμ_sの値を求める。

プログラム PROCGaussNE.exe を起動すると、図１のフォームが表示される。条件の数に合わせて必要な行数を用意する。「追加」ボタンのクリックでアクティブなセルの下に行が挿入され、「削除」ボタンのクリックでアクティブなセルの行が削除される。セルはクリックによりアクティブになる。

図２は例 3.2 の値を設定したものである。設定した値は「保存」ボタンのクリックでＣＳＶ形式のファイルに保存することができる。保存したデータは、「読込」ボタンのクリックで読み込むことができる。保存はＣＳＶ形式であるので、Excel で開くこともできる。読み込みはＣＳＶ形式のファイルの読み込みであるので、「保存」ボタンのクリックで保存されるＣＳＶ形式のファイルと同じスタイルで Excel によって作成してＣＳＶ形式で保存すれ

ば、「読込」ボタンのクリックで読み込むことができる。

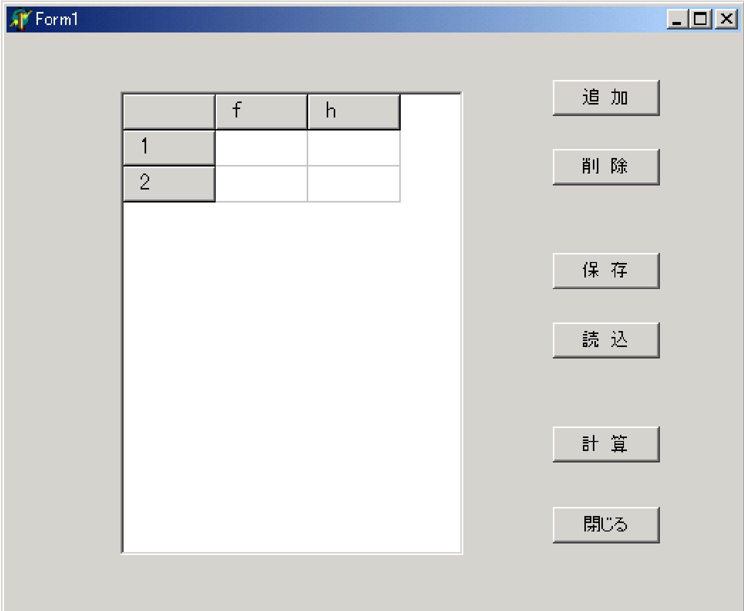


図１　起動時のフォーム

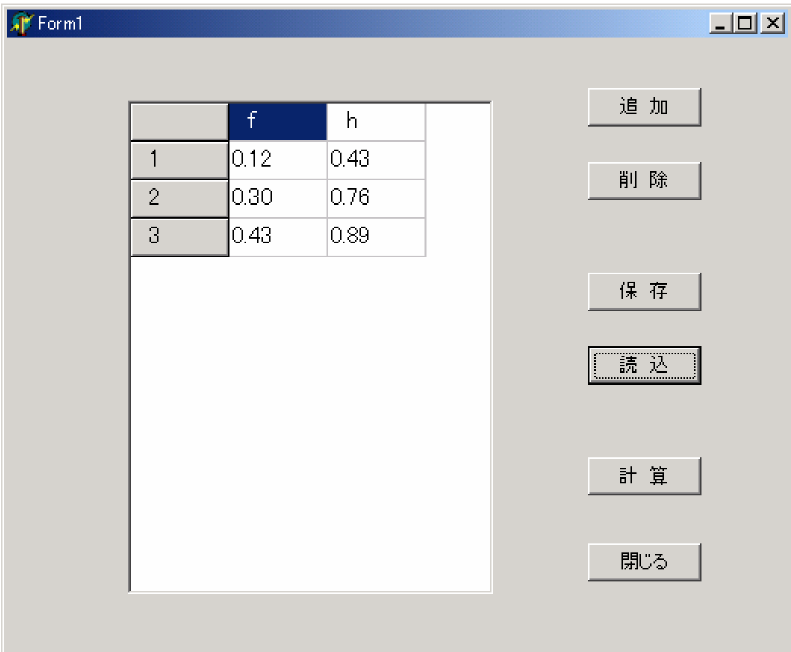


図２　値の設定

図２のように値を設定した後、「計算」ボタンをクリックすると計算結果の表示用画面が図３のように提示される。図中、赤い直線で表されているものは、等分散ガウス型モデルに対して推定された値に基づくＲＯＣ直線である。このときの $\mu_s\ (= d')$ の値は、図の右下に赤字で「mu_s(eq)」の値として示されている。図３では、

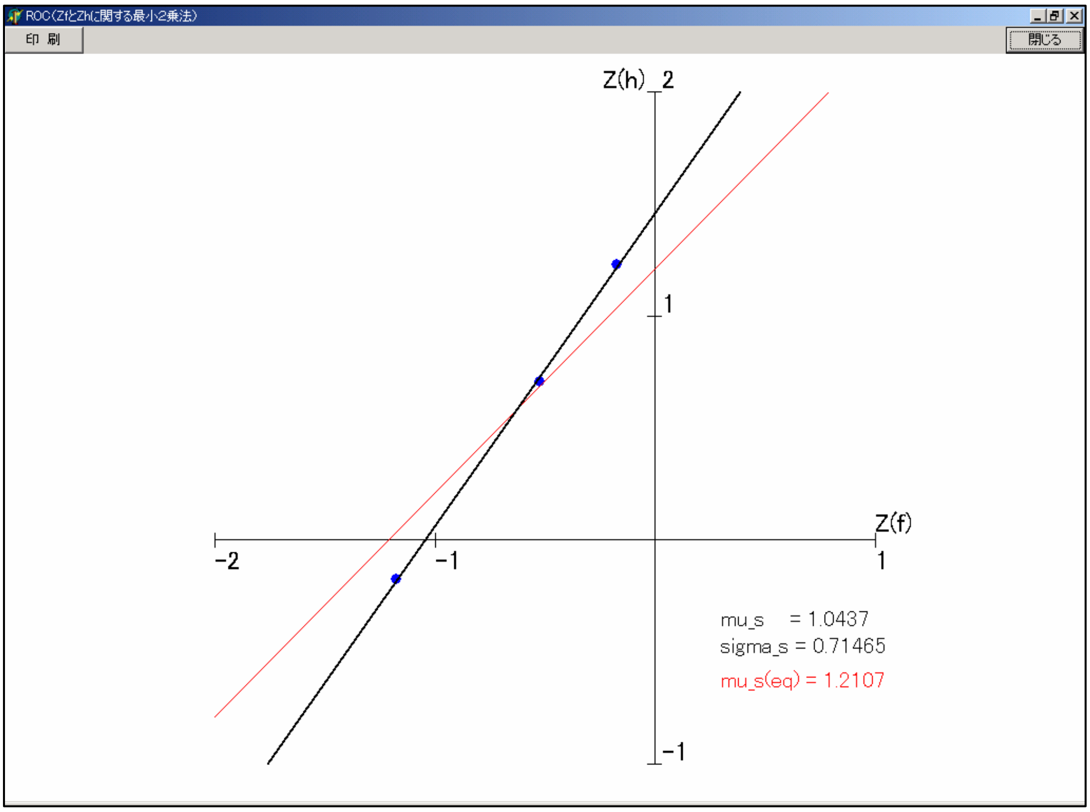


図３　計算結果の表示

mu_s(eq) = 1.2107

となっているので、

$$\hat{d}' = \hat{\mu}_s = 1.2107$$

である。赤の直線で表されている等分散ガウス型モデルのＲＯＣ直線の傾きに比べて、３つのデータの点の並びの傾きはより急である。

　不等分散ガウス型モデルに対するＲＯＣ直線は黒の直線で表されている。この直線は３つのデータの並びによくあっている。このときのパラメタの値は図の右下に黒字で表されている。図２では、mu_s および sigma_s の値として示されている。

mu_s = 1.0437
sigma_s = 0.71465

となっているので、

$$\hat{\mu}_s = 1.0437$$
$$\hat{\sigma}_s = 0.71465$$

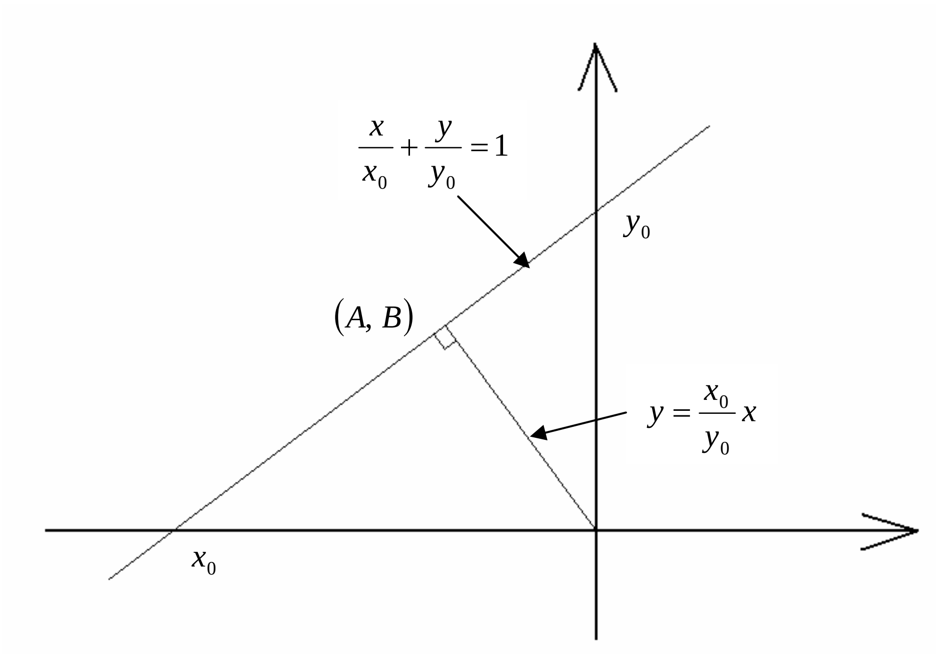
である。
　図３の描画図形は、「印刷」ボタンをクリックするとプリンタに出力される。

参考文献

Brent, R. P. 1973　*Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall, Inc.
Rao, S. S. 1984　*Optimization: Theory and Applications (Second Edition).* John Wiley & Sons.

2004.2
岡本安晴

付録：　直線と点の距離



図ａ１　直線の原点からの距離

まず、原点と直線

$$\frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}=1 \qquad （ａ１）$$

との距離を求める。

原点を通り、直線（ａ１）と直交する直線の方程式は、式（ａ２）で与えられる。

$$y=\frac{x_0}{y_0}x \qquad （ａ２）$$

したがって、直線（ａ１）と（ａ２）の交点(A, B)の座標は、次式を満たす。

$$\frac{A}{x_0}+\frac{B}{y_0}=1 \qquad （ａ３）$$

$$B=\frac{x_0}{y_0}A \qquad （ａ４）$$

式（ａ４）を式（ａ３）に代入して次式を得る。

$$\frac{A}{x_0}+\frac{x_0}{y_0^2}A=1$$

$$\frac{y_0^2+x_0^2}{x_0 y_0^2}A=1$$

$$A=\frac{x_0 y_0^2}{x_0^2+y_0^2} \qquad \text{（a 5）}$$

（a 5）式を（a 4）式に代入して次式を得る。

$$B=\frac{x_0}{y_0}\cdot\frac{x_0 y_0^2}{x_0^2+y_0^2}$$

$$=\frac{x_0^2 y_0}{x_0^2+y_0^2} \qquad \text{（a 6）}$$

式（a 5）および（a 6）より、原点と直線との距離は次式で与えられる。

$$\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{\left(\frac{x_0 y_0^2}{x_0^2+y_0^2}\right)^2+\left(\frac{x_0^2 y_0}{x_0^2+y_0^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{x_0^2 y_0^2\left(y_0^2+x_0^2\right)}{\left(x_0^2+y_0^2\right)^2}}$$

$$=\frac{\left|x_0 y_0\right|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \qquad \text{（a 7）}$$

次に、直線（a 1）と点(u, v)との距離を考える（図 a 2）。座標軸 x 軸と y 軸を、点(u, v)が新しく原点になるように平行移動したものを X 軸と Y 軸とする。
このときの座標の関係は、次式で表される。

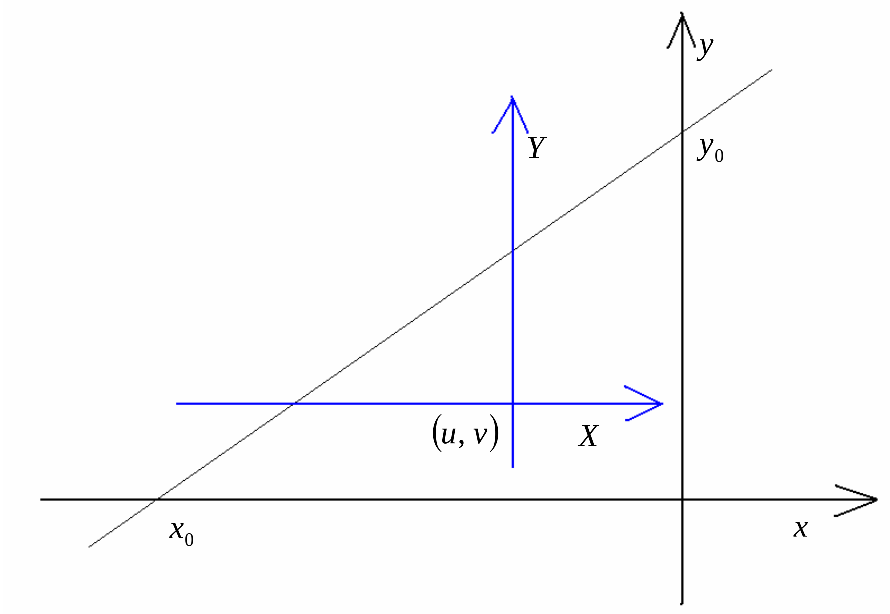
$$X+u=x$$

$$Y+v=y$$

したがって、新しい座標軸によって直線（a 1）は次のように表される。

$$\frac{X+u}{x_0}+\frac{Y+v}{y_0}=1$$

$$\frac{X}{x_0}+\frac{Y}{y_0}=1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}$$



図ａ２　点(u, v)と直線との距離

$$\frac{X}{x_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)}+\frac{Y}{y_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)}=1 \qquad (\text{a}8)$$

式（ａ７）と式（ａ８）より、点(u, v)と直線（１）との距離は次式で与えられることがわかる。

$$\frac{\left|\left[x_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)\right]\left[y_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)\right]\right|}{\sqrt{\left[x_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)\right]^2+\left[y_0\left(1-\frac{u}{x_0}-\frac{v}{y_0}\right)\right]^2}}=\frac{\left|\left(x_0-u-\frac{x_0}{y_0}v\right)\left(y_0-v-\frac{y_0}{x_0}u\right)\right|}{\sqrt{\left(x_0-u-\frac{x_0}{y_0}v\right)^2+\left(y_0-v-\frac{y_0}{x_0}u\right)^2}}$$

すなわち、式（２）が得られた。