

プログラム PCalcMeasuresL.exe について

プログラム PCalcMeasuresL.exe は、最尤法によってパラメタ値を求めてい。

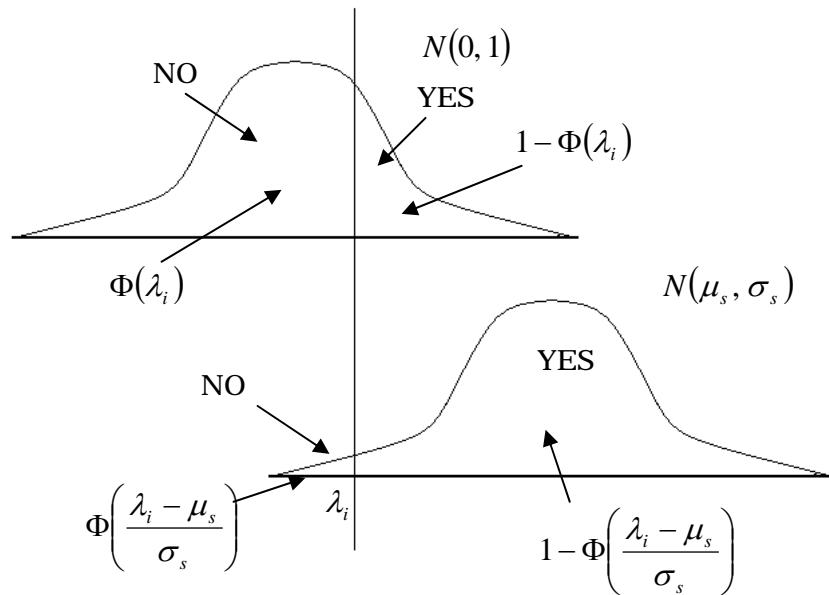


図 1 ノイズとシグナルに対する分布

表 1 観測度数

	YES	NO
シグナル	$SYes_i$	SNO_i
ノイズ	$NYes_i$	NNo_i

条件 i におけるシグナルおよびノイズに対する YES および NO の反応数が表 1 のようであるときの尤度を次式で与える。

$$L = \prod \left[\Phi(\lambda_i)^{NNo_i} \cdot \{1 - \Phi(\lambda_i)\}^{NYes_i} \cdot \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)^{SNo_i} \cdot \left\{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\}^{SYes_i} \right]$$

ここで、

$$\Phi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\lambda} \phi(x) dx$$

である。

したがって、対数尤度は次式で与えられる。

$$l = \log L = \sum [NNo_i \cdot \log \Phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \log \{1 - \Phi(\lambda_i)\}]$$

$$+ SNo_i \cdot \log \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) + SYes_i \cdot \log \left\{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)\right\}$$

対数尤度の偏導関数は次式で与えられる。

$$\frac{\partial l}{\partial \lambda_i} = \sum \left[NNo_i \cdot \frac{1}{\Phi(\lambda_i)} \cdot \phi(\lambda_i) + NYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi(\lambda_i)} \cdot \{-\phi(\lambda_i)\} \right]$$

$$+ SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s}$$

$$+ SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{ -\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_s} \right\}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-1}{\sigma_s} \right]$$

$$+ SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{ -\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \right\} \cdot \frac{-1}{\sigma_s}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \sigma_s} = \sum \left[SNo_i \cdot \frac{1}{\Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_s)}{\sigma_s^2} \right]$$

$$+ SYes_i \cdot \frac{1}{1 - \Phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right)} \cdot \left\{ -\phi\left(\frac{\lambda_i - \mu_s}{\sigma_s}\right) \right\} \cdot \frac{-(\lambda_i - \mu_i)}{\sigma_s^2} \Bigg]$$

プログラム PCalcMeasuresL.exe では、対数尤度 $l = \log L$ を最大にするパラメタ値を偏導

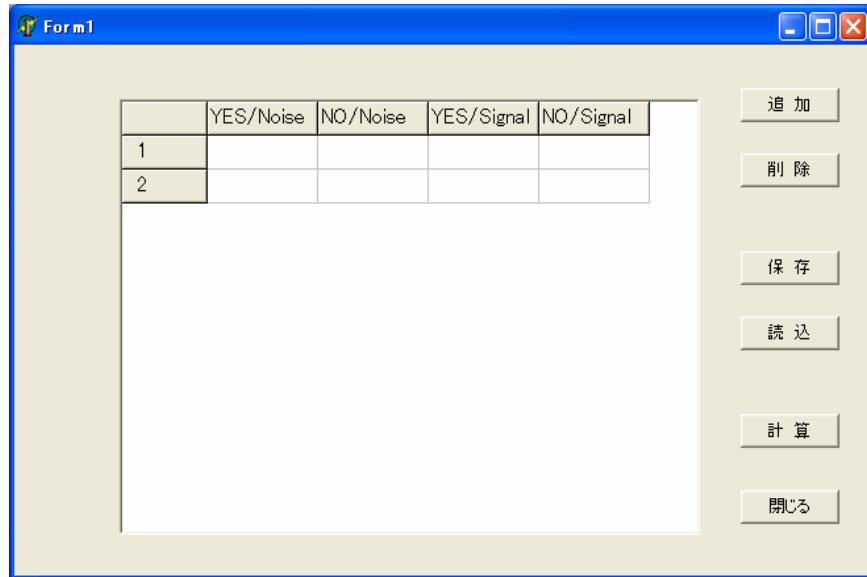


図 1 起動時のフォーム

	YES/Noise	NO/Noise	YES/Signal	NO/Signal	
1	33	167	81	119	
2	55	145	121	79	
3	86	114	127	73	
4	115	85	150	50	

図 2 値の設定

関数を用いない極値探索法である Brent 法によって求めている。

プログラム PCalcMeasuresL.exe を起動すると、図 1 のフォームが表示される。条件の数に合わせて必要な行数を用意する。「追加」ボタンのクリックでアクティブなセルの下に行が挿入され、「削除」ボタンのクリックでアクティブなセルの行が削除される。セルはクリックによりアクティブになる。

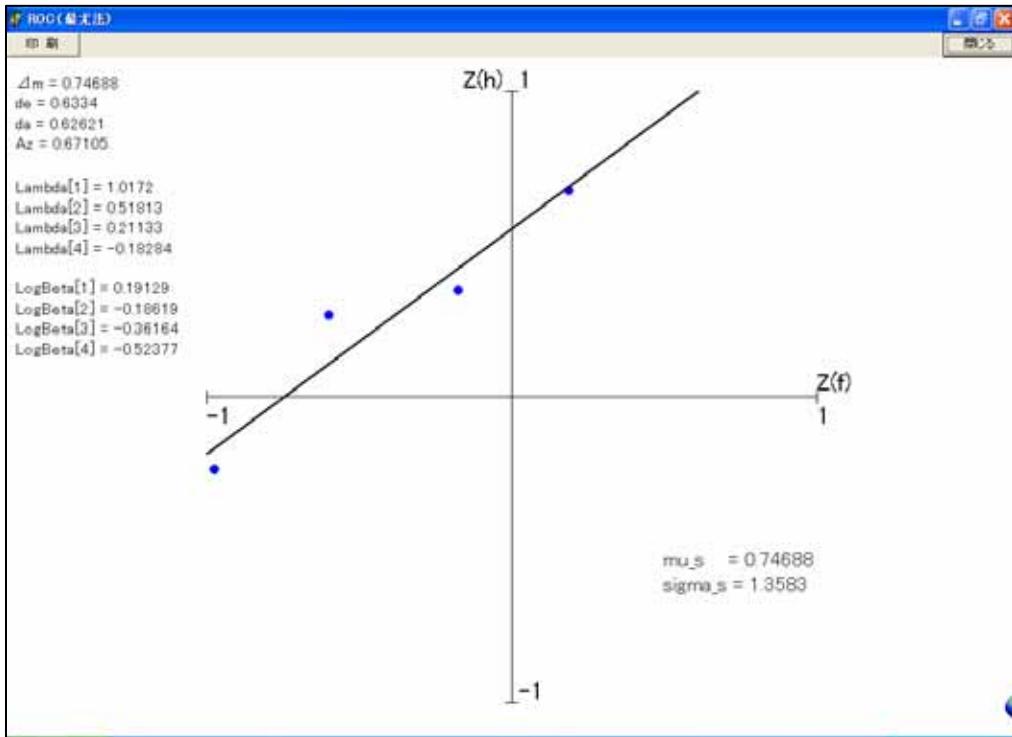


図 3 計算結果の表示

図 2 は例 4.4 の値を設定したものである。設定した値は「保存」ボタンのクリックで CSV 形式のファイルに保存することができる。保存したデータは、「読み込み」ボタンのクリックで読み込むことができる。保存は CSV 形式であるので、Excel で開くこともできる。読み込みは CSV 形式のファイルの読み込みであるので、「保存」ボタンのクリックで保存される CSV 形式のファイルと同じスタイルで Excel によって作成して CSV 形式で保存すれば、「読み込み」ボタンのクリックで読み込むことができる。

図 2 のように値を設定した後、「計算」ボタンをクリックすると計算結果の表示用画面が図 3 のように提示される。不等分散ガウス型モデルに対する ROC 直線が黒の直線で表されている。この直線に対するパラメタの値が画面の右下に表示され、このときの弁別力の測度は画面の左上に表示されている。

$$\begin{aligned} \mu_s &= 0.74688 \\ \sigma_s &= 1.3583 \end{aligned}$$

は、推定値

$$\mu_s = 0.74688$$

$$\sigma_s = 1.3583$$

を表し、

$$m = 0.74688$$

$$de = 0.6334$$

$$da = 0.62621$$

$$Az = 0.67104$$

は、推定値

$$\Delta m = 0.74688$$

$$d_e = 0.6334$$

$$d_a = 0.62621$$

$$A_z = 0.67104$$

を表す。

反応の基準値は、

$$\text{Lambda}[1] = 1.0172$$

$$\text{Lambda}[2] = 0.51813$$

$$\text{Lambda}[3] = 0.21133$$

$$\text{Lambda}[4] = -0.18284$$

$$\text{LogBeta}[1] = 0.19129$$

$$\text{LogBeta}[2] = -0.18619$$

$$\text{LogBeta}[3] = -0.36164$$

$$\text{LogBeta}[4] = -0.52377$$

は、

$$\lambda_1 = 1.0172$$

$$\lambda_2 = 0.51813$$

$$\lambda_3 = 0.21133$$

$$\lambda_4 = -0.18284$$

$$\log \beta_1 = 0.19129$$

$$\log \beta_2 = -0.18619$$

$$\log \beta_3 = -0.36164$$

$$\log \beta_4 = -0.52377$$

を表していて、例 4.4 に示されている推定値と有効桁数の範囲で一致している。

図 3 の描画図形は、「印刷」ボタンをクリックするとプリンタに出力される。

参考文献

- Brent, R. P. 1973 *Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall, Inc.
- Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1968 Maximum likelihood estimation of parameters of signal detection theory – A direct solution. *Psychometrika*.
- Dorfman, D. D. and Alf, Jr., E. 1969 Maximum-likelihood estimation of parameters of signal-detection theory and determination of confidence intervals – Rating-method data. *Journal of Mathematical Psychology*.
- Rao, S. S. 1984 *Optimization: Theory and Applications (Second Edition)*. John Wiley & Sons.