

# 座標変換

## Gram-Schmidt orthonormalization

### 基本的な考え方

距離がユークリッド距離である場合は、座標軸の直交回転と平行移動が可能である。必ずしも互いに直交していないベクトルから新しい直交座標軸を得る方法として Gram-Schmidt orthonormalization がある。N 次元空間において N 個の 1 次独立なベクトルの組、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$ 、が与えられたとき、その Gram-Schmidt orthonormalization は以下の手順で行われる。

(1)  $\mathbf{v}_1$  を長さ 1 のベクトル

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

に変換する。

(2)  $i \leftarrow 1$  とする。

(3)  $i+1$  番目の長さ 1 のベクトル  $\mathbf{u}_{i+1}$  を次式により作る。

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{v}_{i+1} - \sum_{j=1}^i (\mathbf{v}_{i+1} \cdot \mathbf{u}_j) \mathbf{u}_j$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \frac{\mathbf{w}_{i+1}}{\|\mathbf{w}_{i+1}\|}$$

このとき、 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i+1}$  は互いに直交している。

(4)  $i+1 < N$  ならば、

$$i \leftarrow i+1$$

とおいて (3) に戻る。

点  $\mathbf{x}$  の  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$  を座標軸とする座標は

$$(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1 \quad \dots \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_N)$$

で与えられる。

原点を  $\mathbf{a}$  に平行移動したときの点  $\mathbf{x}$  の座標は

$$\mathbf{x} - \mathbf{a}$$

で与えられる。

### プログラム

プログラム PGramSchmidtRot は、上の考え方に基づいて原点の移動と座標軸の直交変換を行うものである。このプログラムを実行すると図 1 のフォームが表示される。

図1 プログラムの実行開始時のフォーム

変換すべき点の座標値の設定を行うためのボタン「Set Points」と、座標軸の方向を与えるベクトルの設定を行うボタン「Set Vectors」がある。座標軸の方向を与えるベクトルは、Gram-Schmidt orthonormalization 法によって長さが 1 の直交ベクトルに変換されるので、新しく座標軸を設定したい大体の方向を示すものであればよい。

図 1 のフォームにおいて、次元数「No. of Dims =」を図 2

図2 次元数の設定

のように設定後、「Set Points」ボタンをクリックすると図 3 のフォームが表示される。

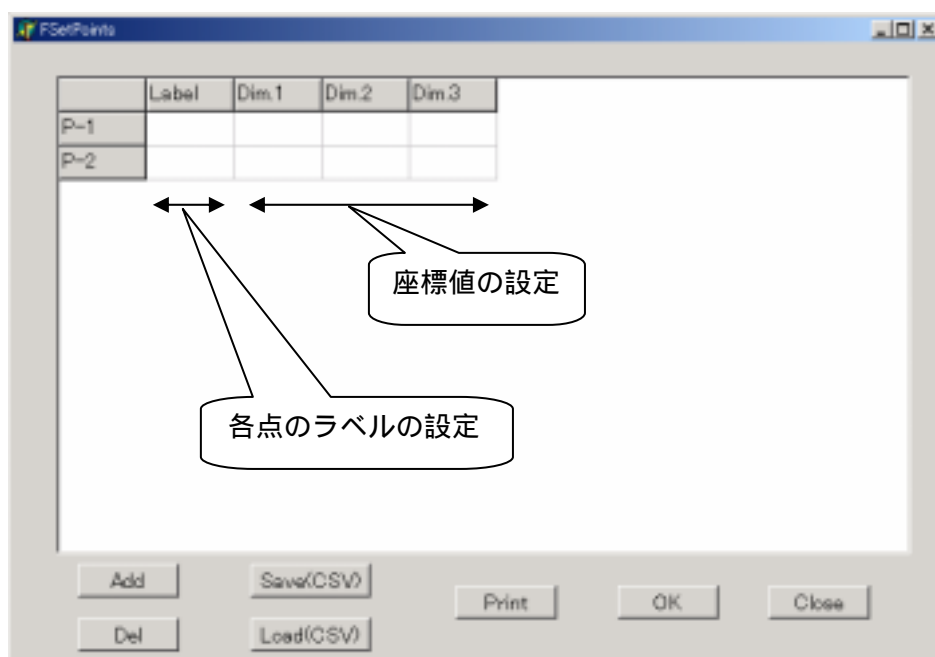


図3 変換すべき点の座標値とラベルの設定

データの設定は、例えば「P-1」の行には、1番目の点 $x_1$ の座標値を各欄「Dim.1」から「Dim.3」の位置に設定する。「Label」欄にはその点のラベルとして用いる文字列を設定する。図4はデータの設定例である。

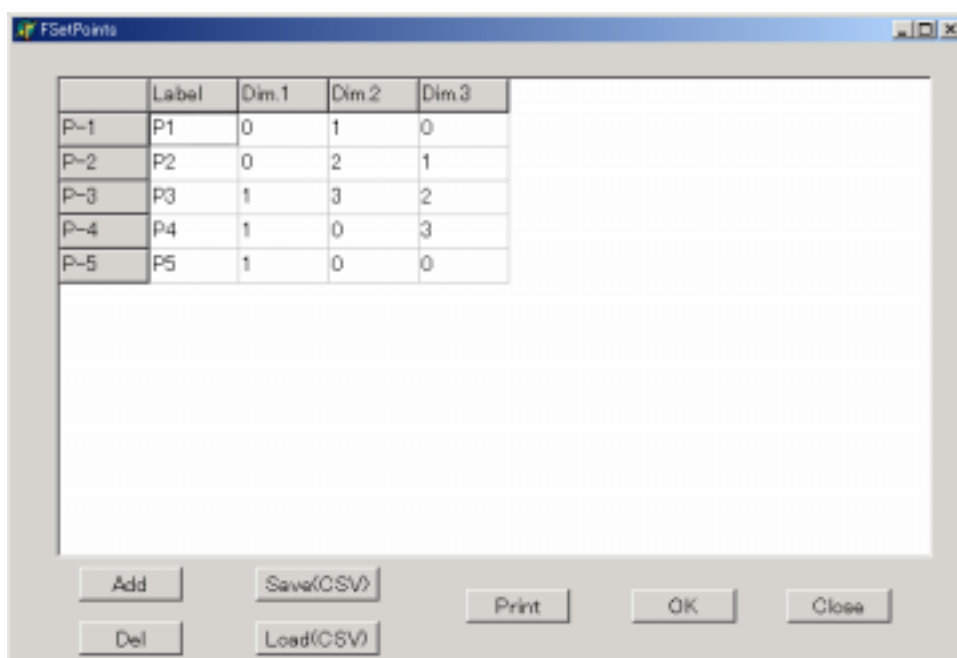


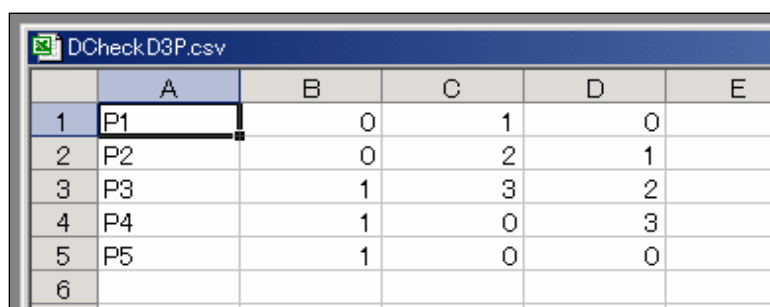
図4 座標値の設定例

図4では、1番目の点のラベルとして「P1」、座標値として $(0 \ 1 \ 0)$ が設定され、5番目

の点のラベルとして「P5」、座標値として(1 0 0)が設定されている。

図3のフォームにおいて、グリッドの行数を増やすときは「Add」ボタンをクリックする。「Add」ボタンのクリックで、アクティブなセルの下に空白の行が挿入される。セルはクリックによりアクティブになる。「Del」ボタンをクリックすると、アクティブなセルを含む行が削除される。

図4のように設定されたデータは、「Save(CSV)」ボタンのクリックで CSV 形式のファイルとして保存される。保存されたデータは、図3のフォームにおける「Load(CSV)」ボタンのクリックで読み込むことができる。CSV形式で保存されたファイルは、Excelでも開くことが出来る。図4のデータをCSV形式で保存したファイルをExcelで開くと、図5のように表示される。



	A	B	C	D	E
1	P1	0	1	0	
2	P2	0	2	1	
3	P3	1	3	2	
4	P4	1	0	3	
5	P5	1	0	0	
6					

図5 CSV形式のファイルをExcelで開いた状態

逆に、Excelにおいて図5の形式で用意されたデータは、CSV形式のファイルとして保存しておくと、図3のフォームにおいて「Load(CSV)」ボタンのクリックで読み込むことが出来る。

図4の「Print」ボタンをクリックすると、設定されているデータがプリンタに書き出される。「Close」ボタンをクリックすると図4のフォームが閉じられる。このときは単にフォームが閉じられるだけである。「OK」ボタンをクリックすると、フォームが閉じられるとともに、設定されたデータがプログラムのデータとして取り込まれる。

「OK」ボタンのクリックでフォームが閉じられると、図6のフォームに戻る。

Form1

No. of Dims = 3

Set Points Set Vectors

Calc Close

Map

図6 メインのフォームに戻った状態

次に、座標軸の方向を決めるベクトルの設定のために「Set Vectors」ボタンをクリックすると、図7のフォームが表示される。

FSetVectors

	Dim.1	Dim.2	Dim.3
Org			
V-1			
V-2			
V-3			

新しく原点とする点の座標

Gram-Schmidt の直交化法を適用するベクトルの組

Save(CSV) Load(CSV) Print OK Close

図7 原点とベクトルの設定用フォーム

原点とベクトルを図8のように設定する。

	Dim.1	Dim.1	Dim.2
Org	0	0	0

	Dim.1	Dim.1	Dim.2
V-1	0	2	0
V-2	0	0	3
V-3	1	0	0

図8 原点の位置とベクトルの設定

図8では、原点  $\mathbf{a} = (0 \ 0 \ 0)$  と3つのベクトル  $\mathbf{v}_1 = (0 \ 2 \ 0)$ 、 $\mathbf{v}_2 = (0 \ 0 \ 3)$ 、 $\mathbf{v}_3 = (1 \ 0 \ 0)$  が設定されている。設定されたデータは、「Save(CSV)」ボタンをクリックするとCSV形式で保存される。保存されたデータは、「Load(CSV)」ボタンのクリックで読み込むことが出来る。CSV形式で保存されたデータは、Excelで開いて見ることも出来る。図8のデータをCSV形式で保存したものをExcelで開くと、図9のように表示される。

	A	B	C	D
1	0	0	0	
2	0	2	0	
3	0	0	3	
4	1	0	0	

図9 原点とベクトルをCSV形式で保存したファイルをExcelで開いたもの

1行目に原点の座標が設定され、2行目からベクトルの座標が順番に設定されている。Excelで図9の形式で用意したデータをCSV形式で保存したものは、図7の「Load(CSV)」ボタンのクリックで読み込むことが出来る。

図8のフォームにおいて、データの設定後「OK」ボタンをクリックすると図8のフォームが閉じられ、設定されたデータはプログラムに取り込まれて、図10のフォームに戻る。このときは、座標値を変換する点と、新しい原点の位置および座標軸を設定するベクトルの設定が終了しているので、メインのフォームの「Calc」ボタンがEnabledになっている。

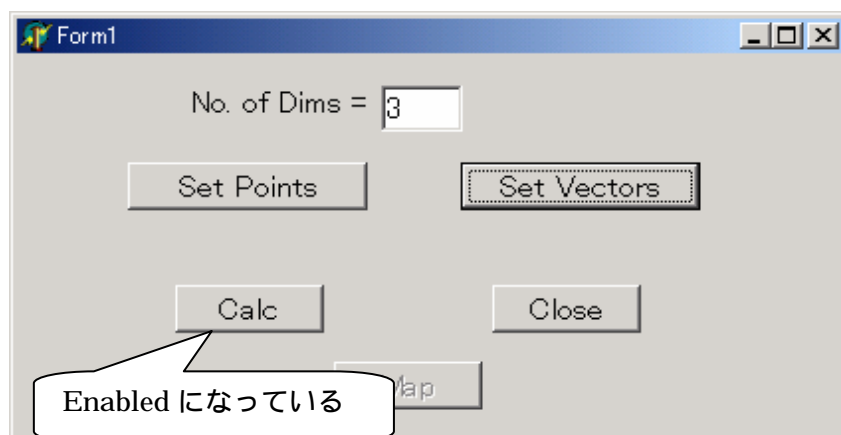


図 1 0 データの設定完了後のフォーム

「Calc」ボタンのクリックで計算が始まる。「Calc」ボタンをクリックすると、まず計算結果を出力するためのファイルの名前の設定を求めるダイアログボックスが表示される（図 1 1）。

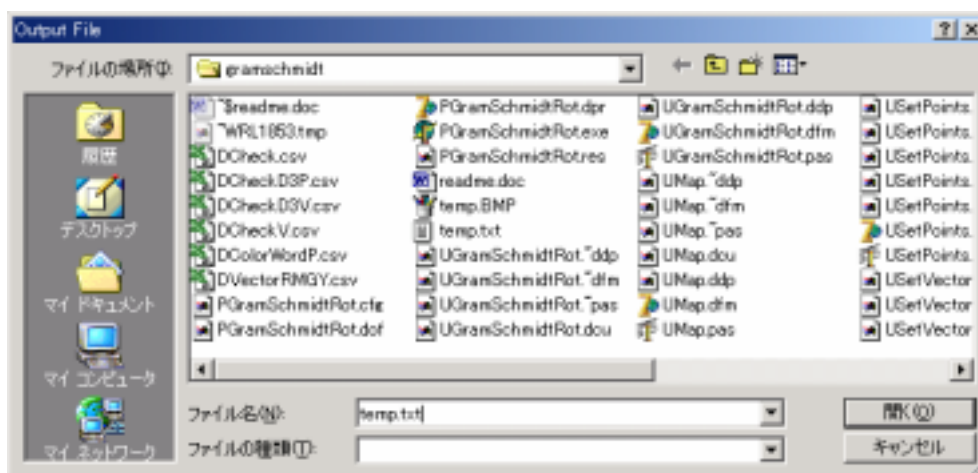


図 1 1 計算結果の出力先のファイル名の設定

ファイル名の設定後、「開く」ボタンをクリックすると計算が始まる。まず、座標軸の原点が図 8 のフォームで設定した原点  $\mathbf{a}$  に移される。その後、図 8 で設定したベクトルの新しい原点による値  $\mathbf{v}_i - \mathbf{a}$  から Gram-Schmidt orthonormalization による正規直交化基底  $\mathbf{u}_i$  が算出される。続いて、座標値を変換する点  $\mathbf{x}$  の新しい原点による値  $\mathbf{x} - \mathbf{a}$  に対して、新しく得られた座標軸  $\mathbf{u}_i$  に対する座標値が変換値として算出される。

すべての計算が終了すると、図 1 2 のメッセージダイアログボックスが表示される。

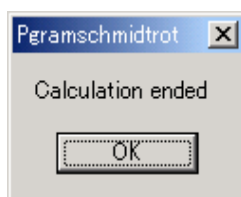


図 1 2 計算終了時に表示されるダイアログボックス

図 1 2 のダイアログボックスの「OK」ボタンのクリックで図 1 3 のフォームが表示される。

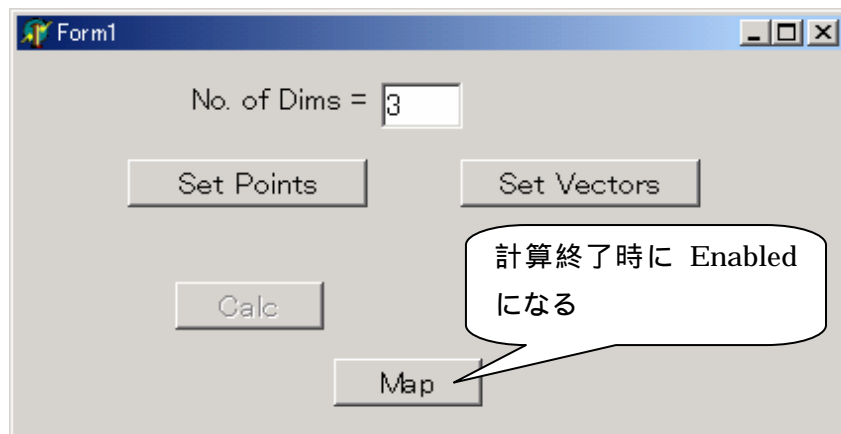


図 1 3 計算終了時のフォーム

このときの図 1 3 のフォームでは、「Map」ボタンが Enabled になっている。「Map」ボタンのクリックで図 1 4 の画面になる。

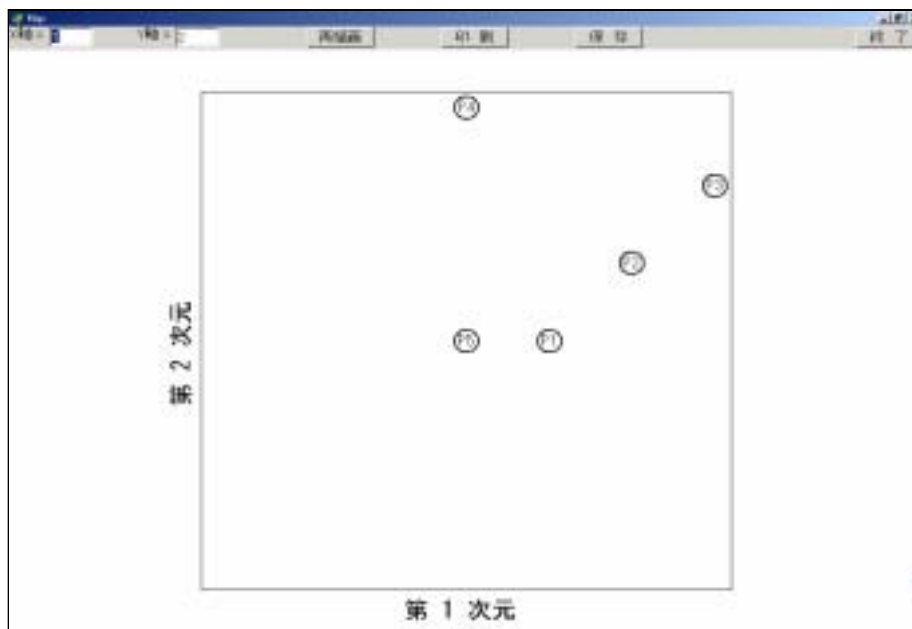


図 1 4 変換後の点の位置

図 1 4 の画面では、新しい座標軸による第 1 次元、第 2 次元の座標値が小円の位置で表されている。小円内の文字は、その小円の表す点のラベルとして設定されている文字列の先頭 2 バイト（日本語 1 文字）である。

他の座標軸による点の配置の描画を行うときは、「X 軸 =」あるいは「Y 軸 =」に適切な次元（座標軸）を設定して「再描画」ボタンをクリックすると、選択した座標軸による描画が行われる（図 1 5 ）。

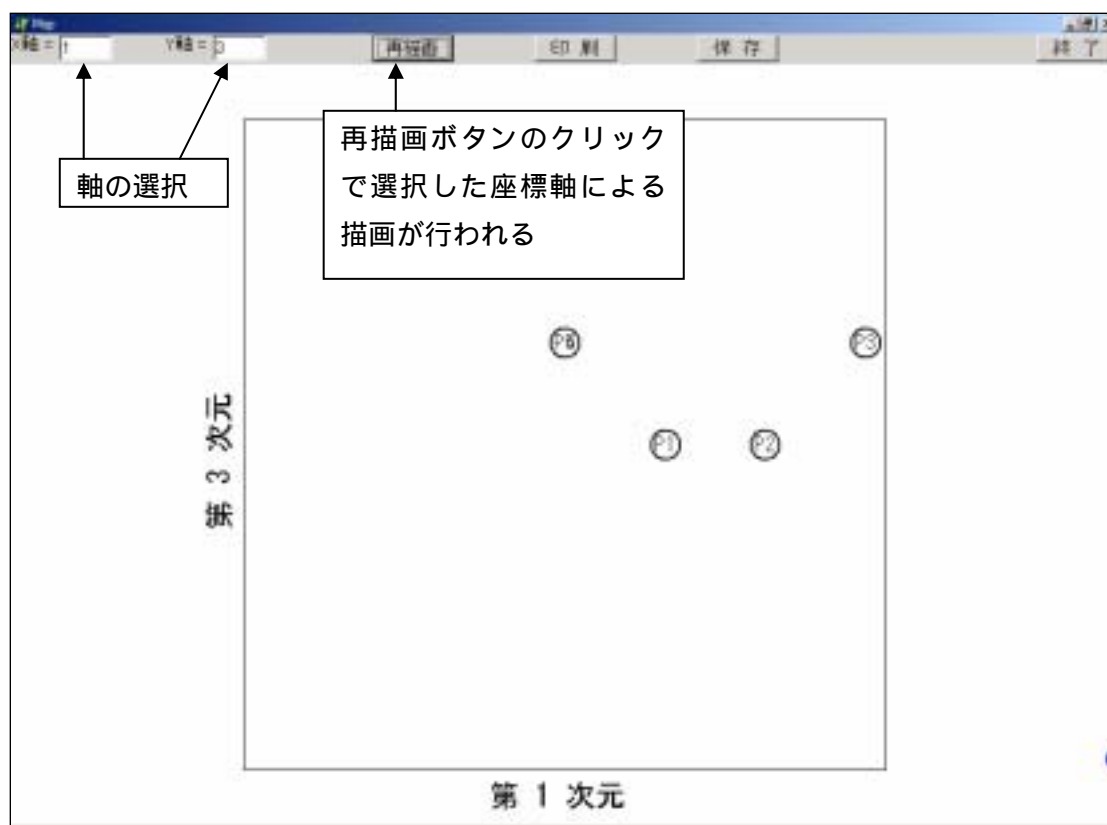


図 1 5 軸の選択と再描画

描画された図は、「印刷」ボタンのクリックでプリンタに出力することが出来る。「保存」ボタンをクリックすると、描画された図がファイルに保存される。

プログラムの実行終了後、図 1 1 のダイアログボックスで設定された名前のテキストファイルを開くと、リスト 1 のようになっている。

## リスト 1 計算結果の出力ファイル

Input Data...					
P- 1	P1	0.00000	1.00000	0.00000	
P- 2	P2	0.00000	2.00000	1.00000	
P- 3	P3	1.00000	3.00000	2.00000	
P- 4	P4	1.00000	0.00000	3.00000	
P- 5	P5	1.00000	0.00000	0.00000	
Origin...					
		0.00000	0.00000	0.00000	
Vectors...					
V-1		0.00000	2.00000	0.00000	
V-2		0.00000	0.00000	3.00000	
V-3		1.00000	0.00000	0.00000	
After transfomation...					
P-1	<P1>		1	0	0
P-2	<P2>		2	1	0
P-3	<P3>		3	2	1
P-4	<P4>		0	3	1
P-5	<P5>		0	0	1

まず、変換すべき点として設定したデータが出力されている。つづいて、新しい原点の位置とする座標と、新しい座標軸の設定に用いるベクトルが出力されている。最後に、変換後の点の座標が出力されている。図 8 で設定されている新しい座標軸の方向は、第 2 座標、第 3 座標、第 1 座標の順に新しい座標軸における第 1 座標、第 2 座標、第 3 座標とするものである。変換後の座標は、元の座標の第 2、第 3、第 1 座標を第 1、第 2、第 3 座標とするものとなっている。