岡本安晴、2003.04

Bayesian Adaptive (Up-Down/Staircase) 法

The Ψ Method

弁別閾（Just Noticeable Difference; JND）などの測定において、提示刺激値をその試行までの被験者の反応に基づいて決める adaptive な方法は、Up-Down 法あるいは Staircase 法など種々のものが提案されてきている。Treutwein (1995)では、adaptive 法として２１種類のものがあげられている（ibid. Table 1)。Klein (2001)は、多分最も優れたものと考えられるものとして Kontsevich and Tyler (1999)の Bayesian adaptive method をあげている。Kontsevich らは彼らのこの方法を psychometric function との関連からΨ法（the Ψ method）と名付けている。Ψ法の特徴は、Bayesian の考え方に基づくものであること、および提示刺激を事後確率のエントロピー（不確かさ）の期待値を最小にするものとして求めていることである。また、単独のΨ法で、弁別閾だけではなく主観的等価点（Point of Subjective Equality; PSE）も求めることができる。具体的な方法を以下に説明する。方法の説明の後、Ψ法を用いたサンプルプログラム PPsyFuncBayes.dpr[1]の使用法について解説する。

方法

まず、Psychometric function $\Psi_{\mu,\sigma}(x)$の関数形を次式

$$\Psi_{\mu,\sigma}(x)=\alpha+(1-\alpha-\beta)\cdot N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{1}$$

で与える。ここで、$N(z)$は標準正規分布の累積確率分布関数である。α および β は不注意による誤りの確率を表し、$\Psi_{\mu,\sigma}(x)$は標準刺激 s に対して比較刺激 x の方が強いという判断が返される確率である。標準刺激 s と比較刺激 x との比較判断はいずれがより強いかという２件法で求められているものとする。標準刺激 s に対して比較刺激 x の方が強いと感じられる真の確率は $N((x-\mu)/\sigma)$ で与えられると考えるが、標準刺激 s より比較刺激 x の方が弱いと感じられたのにもかかわらず誤って比較刺激の方が強いと答えてしまう確率を α とお

[1]実行形式のファイル PPsyFuncBayes.exe は Delphi のインストールされていない Windows パソコンでも直接実行可能である。プロジェクトソースファイル PPsyFuncBayes.dpr は Delphi から開いて実行するものである。Delphi から開くと、必要に応じてプログラムを変更することができる。

いている。逆に、標準刺激sより比較刺激xの方が強いと感じられたときに誤って比較刺激の方が弱いと答えてしまう確率はβとおいている。したがって、比較刺激xの方が強いという答えの返ってくる確率は

$$\left\{1-N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}\cdot\alpha+N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot(1-\beta)=\alpha+(1-\alpha-\beta)\cdot N\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

で与えられる。

いま、パラメタμとσの分布の主観的確率に関する第t試行における事前確率を$p_t(\lambda)$で表す。ただし、$\lambda=(\mu,\sigma)$とおいている。このとき、事後確率などを以下の手順で算出する。

ステップ１.

第t試行において比較刺激値xに対して反応rの生起する確率$p_t(r|x)$を次式で求める。

$$p_t(r|x)=\sum_{\lambda}p(r|\lambda,x)p_t(\lambda)$$

ここで、

$$r=\begin{cases}1 & \text{比較刺激の方が強いという反応のとき}\\ 0 & \text{標準刺激の方が強いという反応のとき}\end{cases}$$

$$p(r|\lambda,x)=\begin{cases}\Psi_{\mu,\sigma}(x) & \mathrm{r}=1\text{のとき}\\ 1-\Psi_{\mu,\sigma}(x) & \mathrm{r}=0\text{のとき}\end{cases}$$

である。

ステップ２.

反応rが与えられたときの$\lambda=(\mu,\sigma)$の事後確率分布$p_t(\lambda|x,r)$を次式で求める。

$$p_t(\lambda|x,r)=\frac{p_t(\lambda)p(r|\lambda,x)}{\sum_{\lambda}p_t(\lambda)p(r|\lambda,x)}$$

ステップ３.

事後確率分布$p_t(\lambda|x,r)$のエントロピー$H_t(x,r)$を求める。

$$H_t(x,r)=-\sum_{\lambda}p_t(\lambda|x,r)\log(p_t(\lambda|x,r))$$

ステップ４.

比較刺激値xに対するエントロピーを反応rに関する期待値$E[H_t(x)]$をとることにより求める。

$$E[H_t(x)] = \sum_r p_t(r|x) H_t(x,r)$$

ステップ５.

第$t+1$試行において提示する比較刺激値x_{t+1}を期待エントロピー$E[H_t(x)]$を最小にするものとして求める。

$$x_{t+1} = \arg \min_x E[H_t(x)] \qquad (2)$$

ステップ６.

比較刺激値x_{t+1}に対する反応r_{t+1}を求める。

ステップ７.

得られた反応r_{t+1}に対する事後確率$p_{t+1}(\lambda)$を次式で定める。

$$p_{t+1}(\lambda) = p_t(\lambda | x_{t+1}, r_{t+1})$$

ステップ８.

試行数が設定数に達していないときは$t+1$の値を次のtの値としてステップ１に戻る。試行数が設定回数に達したときは最後の試行で得られた事後確率$p_{t+1}(\lambda)$からパラメタλの推定を行う。Ψ法では事後確率$p_{t+1}(\lambda)$によるλの平均値を推定値としているが、次節で説明するプログラム PPsyFuncBayes.dpr では、提示刺激値の周期性を隠蔽するため２系列のΨ法を用いているので、事後確率は２系列のデータを一緒にしたものに対して求め直し、λの平均値をその求め直した事後確率を用いて算出している。

プログラム PPsyFuncBayes.dpr

Ψ法を用いて線分の長さの弁別閾と主観的等価点を求めるサンプルプログラムが PPsyFuncBayes.dpr である。このプログラムを実行すると図１のフォームが提示される。

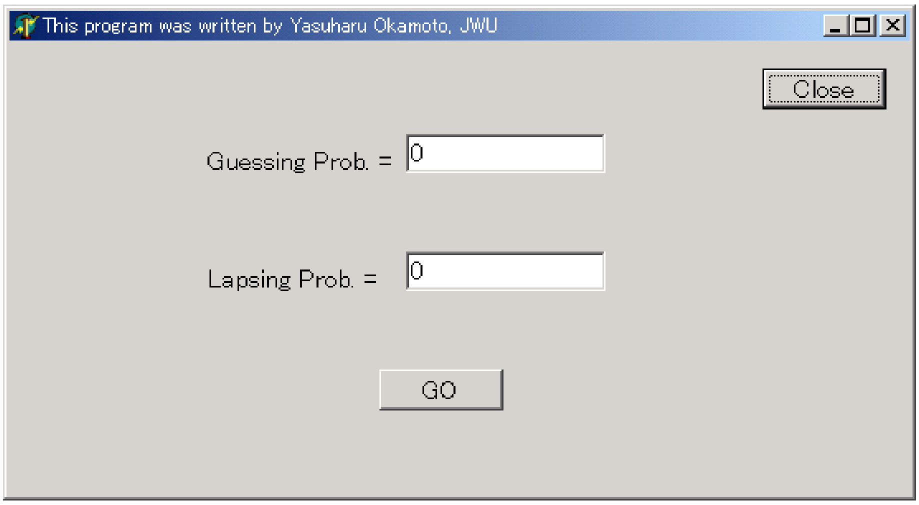

図１　プログラム起動時のフォーム

「Guessing Prob. =」の値は式（１）におけるαの値、「Lapsing Prob. =」の値は式（１）におけるβの値を表す。普通は、これらの値は０のままでよいが、必要に応じて適当な値を設定することもできる。「GO」ボタンのクリックで実験がスタートする。「GO」ボタンをクリックすると「計算中」のメッセージがしばらく表示された後、図２の画面になる。

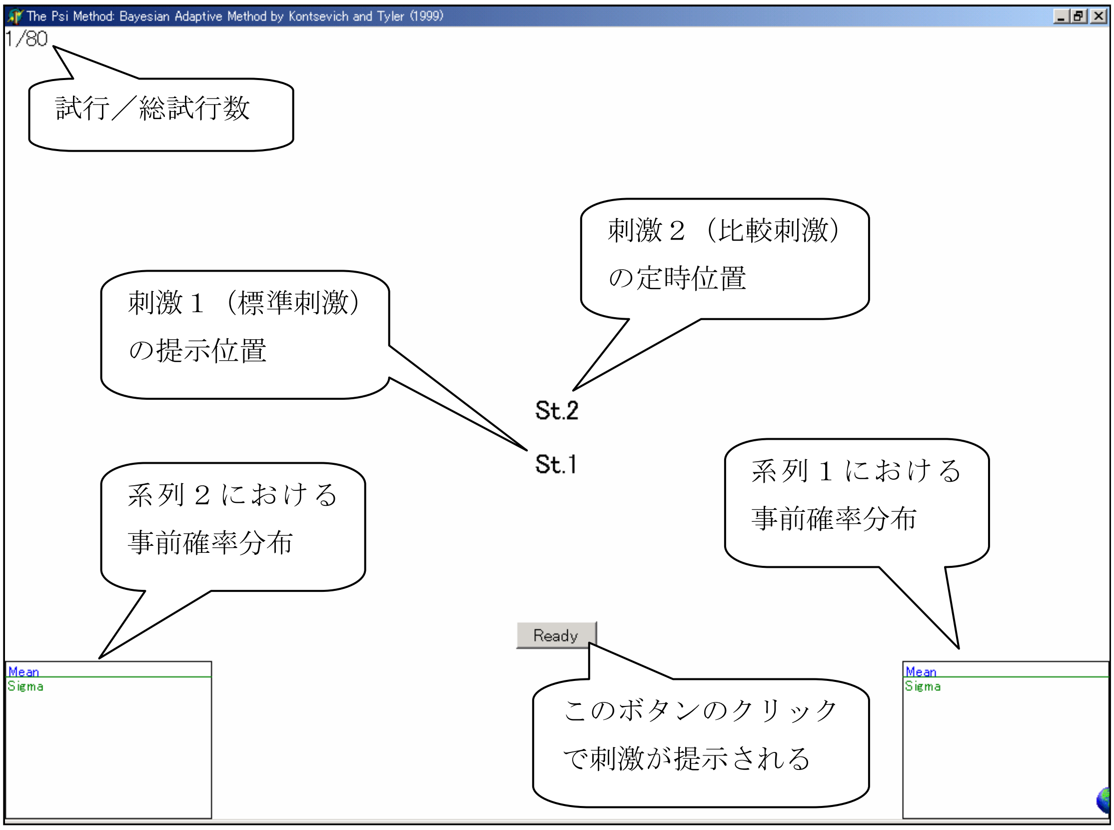

図２　刺激提示前の画面

画面左上の文字列「1/80」は総試行数８０における第１試行目であることを表す。本プログラムにおいては、Ψ法による提示刺激系列を系列１と系列２の２つの系列を用意している。これは、Ψ法においては提示される比較刺激の強さが強弱交互の繰り返しになる傾向があるので、その影響を被験者が受けることを避けるためである。２系列を用意して、各試行においてどちらの系列からの比較刺激が提示されるかをランダムに決めている。各系列４０試行を用意しているので２系列で８０試行となる。表示されている試行数は２系列を合わせて数えたものである。画面の右下に系列１における事前確率分布、左下に系列２における事前確率分布が表示されている。事前確率分布は周辺分布

$$p_t(\mu) = \sum_{\sigma} p_t(\mu, \sigma)、\qquad p_t(\sigma) = \sum_{\mu} p_t(\mu, \sigma)$$

として表示されている。Mean はパラメタμのことであり青色で表され、Sigma はパラメタσのことで緑色で表されている。図ではμの分布とσの分布が重なっており、緑のσの分布のみが表示されている。事前確率分布の初期値$p_0(\lambda)$は一様分布を採用しているが、他の分布を採用することはプログラムの初期値の設定部分を書き変えるだけで簡単にできる。

「Ready」ボタンをクリックすると、まず標準刺激である２００ピクセルの長さの線分が「St.1」と表示されている文字列の上端に提示される。続いて式（２）で与えられる長さの線分が比較刺激として「St.2」と表示されている文字列の上端に表示される。標準刺激および比較刺激の提示の画面においては文字列やグラフなどの表示は消去されている。刺激の提示後、図３の画面になる。

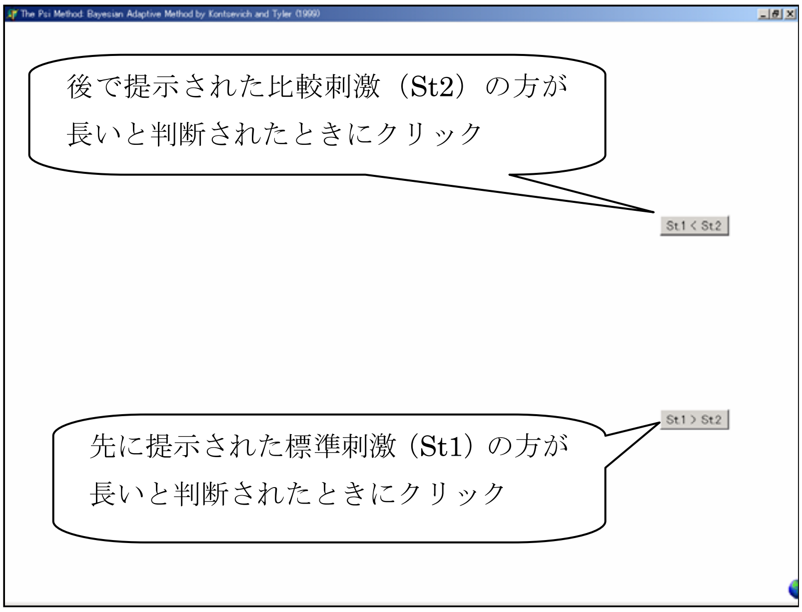

図３　比較判断の画面

後で提示された比較刺激（St2）の方が先に提示された標準刺激（St1）より長いと判断さ

れたときは上の方の「St1. < St.2」ボタンをクリックし、標準刺激の方が比較刺激より長いと判断されたときは下の方の「St.1 > St.2」ボタンをクリックする。いずれかのボタンのクリックで選択されたボタンに対応した計算が始まり、計算が終了すると図４のような画面になる。

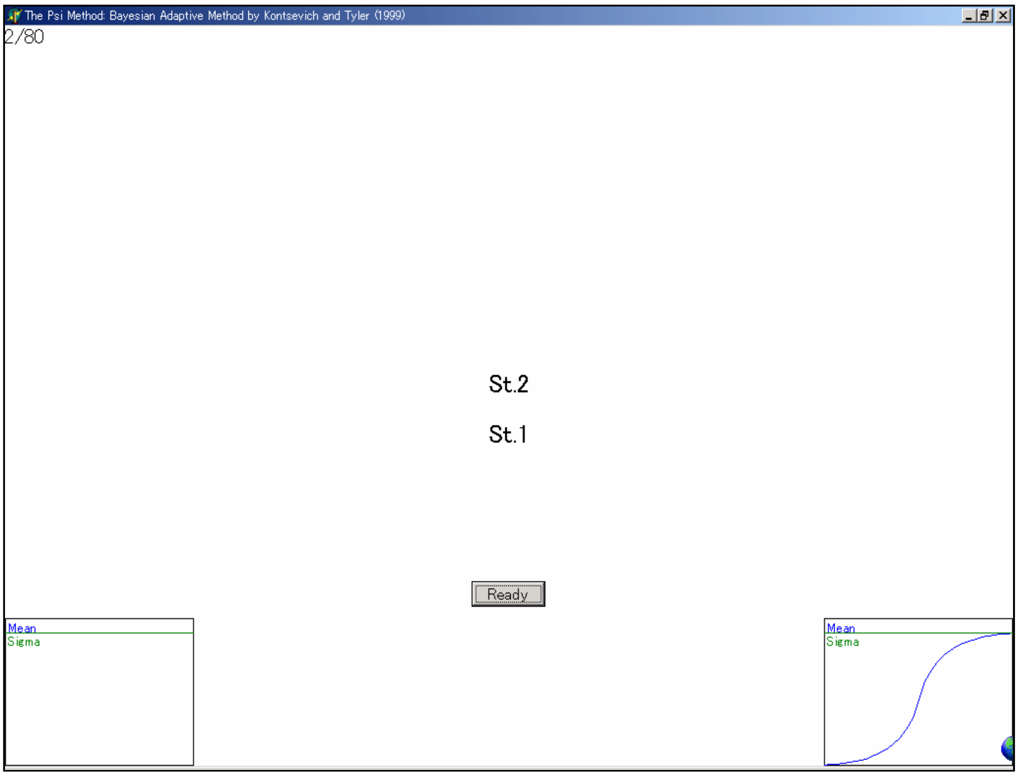

図４　比較判断（図３）の後に提示される画面

図４は画面左上の表示から第２試行に対するものであることがわかる。画面右下の系列１における事前確率分布が図２におけるものと異なっているのは、提示された比較刺激が系列１からのものであったからである。第２試行における事前確率分布は第１試行における事後確率分布である。提示された比較刺激が系列２からのものであった場合は左側の事前確率分布（第１試行における事後確率分布）が変化する。どちらの系列のものが提示されるかはプログラムの実行時にランダムに決められる。第１試行における比較刺激が系列２からのものであったときは左下に表示される事前確率分布が第１試行の画面におけるものと異なったものとなる。図４の右下の確率分布ではμの確率分布が大きく変化しているが、σの方はほとんど変化が認められない。試行が進むにつれて確率分布が変化していくが、Ψ法では始めの方の試行の間はμの分布がデータに応じて大きく変化して、その後試行がある程度進むとσの分布も単峰性のものに変化していく。

すべての試行（８０試行）が終了すると図５の画面になる。

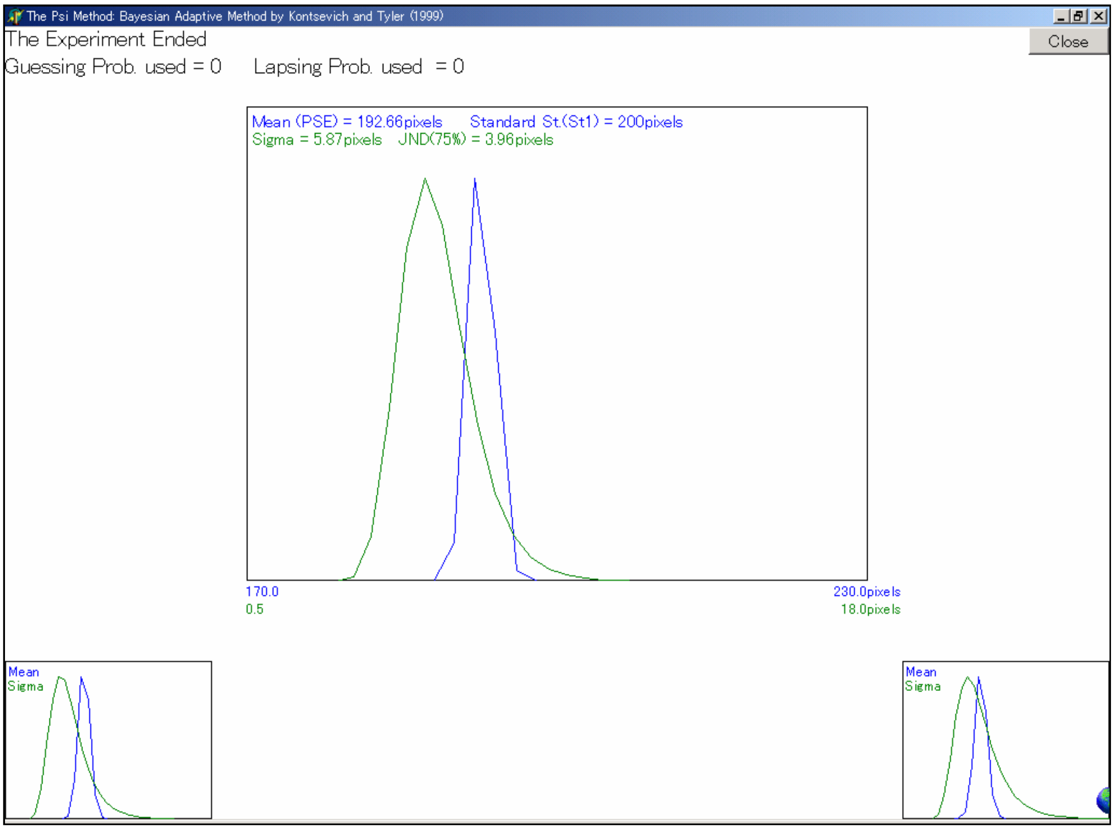

図５　最終結果の表示

中央に系列１と系列２のデータを合わせたときの事後確率分布が表示されている。グラフ上部に表示されているパラメタの推定値は平均値

$$\hat{\mu} = \sum_{\lambda} \mu \cdot p_{post}(\lambda)、\quad \hat{\sigma} = \sum_{\lambda} \sigma \cdot p_{post}(\lambda)$$

である。ここで、$p_{post}(\lambda)$は系列１と系列２のデータを合わせた最終的な事後確率を表す。

この$p_{post}(\lambda)$は次のように算出されている。

系列１および系列２の第t試行における提示刺激（比較刺激）値を$x_{1,t}$および$x_{2,t}$で表し、$x_{1,t}$および$x_{2,t}$に対する反応を$r_{1,t}$および$r_{2,t}$で表す。ここで、試行数tはそれぞれの系列内で数える。したがって、$t = 1, \cdots, 40$である。系列１および系列２における最初の事前確率分布はともに$p_0(\lambda)$であるので、２つの系列のデータを合わせたときの事後確率分布を次式

$$p_{post}(\lambda)=\frac{p_0(\lambda)\cdot\prod_t p\left(r_{1,t}\middle|\lambda,\,x_{1,t}\right)\cdot\prod_t p\left(r_{2,t}\middle|\lambda,\,x_{2,t}\right)}{\sum_\lambda\left\{p_0(\lambda)\cdot\prod_t p\left(r_{1,t}\middle|\lambda,\,x_{1,t}\right)\cdot\prod_t p\left(r_{2,t}\middle|\lambda,\,x_{2,t}\right)\right\}}$$

で与える。

$\hat{\mu}$ の値は、標準刺激に対する比較刺激の主観的等価点（PSE, Point of Subjective Equality）になっている。弁別閾（JND, Just Noticeable Difference）は弁別確率７５％に対する値として求めている。JND を ΔI で表し、標準刺激の値を I とすると

$$P(I \prec I+\Delta I)=0.75$$

である。ここで、「$I \prec I+\Delta I$」は $I+\Delta I$ の刺激値（比較刺激）が I（標準刺激）より強く感じられることを表す。プログラムでは、ΔI の値を $\hat{\sigma}$ から次式により算出している。

$$\Delta I = 0.67449\times\hat{\sigma}$$

参考・引用文献

Klein, S. A. (2001)　Measuring, estimating, and understanding the psychometric function: A commentary. *Perception & Psychophysics*, 63, 1421 – 1455.

Kontsevich, L. L. and Tyler, C. W. (1999)　Bayesian adaptive estimation of psychometric slope and threshold. *Vision Research*, 39, 2729 – 2737.

Treutwein, B. (1995)　Adaptive psychophysical procedures. *Vision Research*, 35, 2503 – 2522.